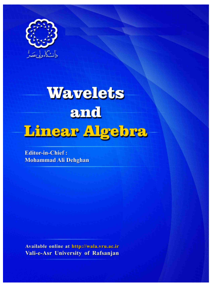
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۳۷-۵۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

نگهدارنده های خطی مهتر راست-چپ ماتریسی

احمد محمدحسنی*[آ]، یامین سیاری[آ]، مهدی سبزواری[ب]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی سیرجان، ایران

[ب]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه هرمزگان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۸ خرداد ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۲۳ اردیبهشت ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی تقوی

کلمات کلیدی:
نگهدارنده خطی، مهتر چندگانه، مهتر راست، مهتر چپ، مهتر راست-چپ.

چکیده

ماتریس حقیقی و نامنفی A یک ماتریس تصادفی سطری نامیده می شود، هر گاه مجموع درایه های هر سطر آن برابر با یک باشد. فرض کنید x و y دو بردار در فضای برداری $\mathbb{R}_n$ باشند. گوییم بردار y مهتر راست-چپ بردار x است و می نویسیم $x \prec_{rl} y$، هرگاه دو ماتریس مربعی و تصادفی سطری مانند A و B وجود داشته باشد بطوریکه $x = yA$ و $x^t = By^t$. گوییم تبدیل خطی $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ نگهدارنده خطی رابطه $\mathcal{R}$ است هرگاه $x\mathcal{R}y$ نتیجه دهد $T(x)\mathcal{R}T(y)$. در این مقاله خواص مهتری های راست-چپ ماتریسی روی فضای $\mathbb{R}_n$ را بررسی نموده ایم و همه نگهدارنده های خطی رابطه مهتر راست-چپ $\prec_{rl}$ روی فضای بردارهای n بعدی را مشخص کرده ایم. در حقیقت نشان داده ایم که برای $n \leq ۳$ نگهدارنده های خطی رابطه مهتر راست-چپ ماتریسی $\prec_{rl}$ و نگهدارنده های خطی رابطه مهتر چندگانه ماتریسی $\prec_m$ یکسان می باشند ولی برای $n \geq ۴$ چنین نیست.

۱. مقدمه

فرض کنید $\mathbf{M}_{n,m}$ مجموعه همه ماتریس های حقیقی n سطر و m ستون باشد و $\mathbf{M}_n$ مجموعه همه ماتریسهای مربعی با n سطر و n ستون. فرض کنید $\mathbb{R}_n$ $(\mathbb{R}^n)$ بردارهای افقی (عمودی) با n مولفه باشد. یک ماتریس نامنفی (یک بردار نامنفی) $A = [a_{ij}]$ ماتریسی (برداری) است که همه درایه های آن نامنفی باشند (می نویسیم $A \geq ۰$) و می نویسیم $B \leq A$ هرگاه $A - B \geq ۰$. ترانهاده ماتریس

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: a.mohammadhasani53@gmail.com (احمد محمدحسنی)، y.sayyari@sirjantech.ac.ir (یامین سیاری)، sabzevari@hormozgan.ac.ir (مهدی سبزواری).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.128186.1286

$A = [a_{ij}]$ را با نماد A^t نشان می دهیم و ماتریس $|A|$ برابر است با $|A| = [|a_{ij}|]$. j-مین بردار یکه را با نماد e_j نشان می دهیم و بردار $e \in \mathbb{R}_n$ برداری است که همه مولفه های آن برابر با یک می باشند. نمادهای N_n و P_n را بترتیب برای مجموعه های $\{۱, ۲, ..., n\}$ و مجموعه ماتریس های مربعی جایگشت به کار می بریم. برای $x = y^t = (x_۱, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n$ تعریف می کنیم $tr_+(x) = tr_+(y) = \sum_{x_i \geq ۰} x_i$، $tr_-(x) = tr_-(y) = \sum_{x_i < ۰} x_i$ و $tr(x) = tr(y) = tr_+(x) + tr_-(x)$.

فرض کنید $x^\downarrow = y^{\downarrow t} = (x_۱^\downarrow, ..., x_n^\downarrow)$ بردار بدست آمده از مولفه های x باشد که بصورت نزولی مرتب شده اند، یعنی:

$$x_۱^\downarrow \geq x_۲^\downarrow \geq ... \geq x_n^\downarrow.$$

فرض کنید دو بردار $x, y \in \mathbb{R}_n(\mathbb{R}^n)$ داده شده اند، گوییم بردار y نسبت به x مهتر چندگانه است و می نویسیم $x \prec_m y$، اگر

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i^\downarrow \leq \sum_{i=۱}^{k} y_i^\downarrow \text{ و } \sum_{i=۱}^{n} x_i^\downarrow = \sum_{i=۱}^{n} y_i^\downarrow, \tag{۱.۱}$$

برای همه $k(۱ \leq k \leq n)$، هر گاه ابهامی نباشد گوییم y مهتر x است.

ماتریس $R \in \mathbf{M_n}$ یک ماتریس تصادفی سطری نامیده می شود هرگاه $R \geq ۰$ و مجموع درایه های هر سطر آن برابر با یک باشد. برای بردارهای $x, y \in \mathbb{R}_n$ (متناسبا $\mathbb{R}^n$)، گوییم بردار y مهتر راست(متناسبا مهتر چپ) x است (می نویسیم $x \prec_r y$ (متناسبا $x \prec_l y$)) اگر وجود داشته باشد ماتریس مربعی تصادفی سطری R که $x = yR$ (متناسبا $x = Ry$).

گزاره ۱.۱. *[۱۰] اگر $x, y \in \mathbb{R}_n$، آنگاه شرایط زیر معادلند:*

۱. $x \prec_r y$

۲. $||x||_۱ \leq ||y||_۱$ و $tr(x) = tr(y)$.

نتیجه ۲.۱. *[۱۰] اگر $x, y \in \mathbb{R}_n$، آنگاه شرایط زیر معادلند:*

۱. $x \sim_r y$

۲. $\|x\|_1 = \|y\|_1$ و $tr(x) = tr(y)$.

گزاره ۳.۱. *[۱۱] فرض کنید $X, Y \in M_{n,m}$، دراین صورت $X \prec_l Y$ اگر وتنها اگر $R(X) \subseteq R(Y)$، که در آن $R(A)$ مجموعه همه سطرهای مجزای A است و $co(R(A))$ غلاف محدب آنها.*

نتیجه ۴.۱. *اگر $x, y \in R^n$، آنگاه $x \prec_l y$ اگر وتنها اگر*

$$min_{1\leq i\leq n} y_i \leq min_{1\leq i\leq n} x_i \leq \max_{1\leq i\leq n} x_i \leq \max_{1\leq i\leq n} y_i.$$

نتیجه ۵.۱. *اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$، آنگاه شرایط زیر معادلند:*

۱. $x \sim_l y$

۲. $\max_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} y_i$ و $\min_{1\leq i\leq n} x_i = \min_{1\leq i\leq n} y_i$.

قضیه ۶.۱. *[۸] ماتریس A تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر $Ax \prec_m x$ برای همه x.*

قضیه ۷.۱. *[۸] اگر $x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R}_n)$. آنگاه شرایط زیر معادلند:*

۱. $x \prec_m y$

۲. وجود داشته باشد یک ماتریس $n \times n$ تصادفی دوگانه D بطوریکه $x = Dy$ $(x = yD)$.

قضیه ۸.۱. *[۲] فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد. آنگاه T نگهدارنده $\prec_m$ است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:*

۱. بردار $a \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد که $T(x) = tr(x)a$، برای همه $x \in \mathbb{R}^n$،

۲. ماتریس جایگشت $P \in P_n$ و اعداد حقیقی r, s موجود باشند، بطوریکه

$$T(x) = rP(x) + sJ(x)$$

برای همه $x \in \mathbb{R}^n$.

۲. نتایج اصلی

در این بخش نشان می دهیم که رابطه مهتر راست-چپ و رابطه مهتر چندگانه برای $n \leq ۳$ یکسان می باشند ولی برای $n \geq ۴$ چنین نیست و همچنین همه نگهدارنده های خطی رابطه مهتر $\prec_{rl}$ روی فضای بردارهای n بعدی را مشخص کرده ایم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}_n$. گوییم که y مهتر راست-چپ نسبت به x است (می نویسیم $x \prec_{rl} y$) اگر $x \prec_r y$ و $x^t \prec_l y^t$.

لم ۲.۲. *فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}_n$ و $x \prec_m y$ آنگاه $x \prec_{rl} y$.*

اثبات. فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}_n$ و $x \prec_m y$، لذا وجود دارد یک ماتریس تصادفی دوگانه D که $x = Dy$، پس $x \prec_l y$، همچنین $x^t = y^t D^t$ و $x^t \prec_r y^t$. بنابراین $x \prec_{rl} y$. □

مثال (۳.۲) نشان می دهد که بالعکس لم (۲.۲) لزوما درست نیست.

مثال ۳.۲. فرض کنید $x = (۱, ۱, ۴, ۴)$ و $y = (۱, ۲, ۲, ۵)$. آنگاه $x \prec_{rl} y$ ولی $x \not\prec y$.

گزاره ۴.۲. *فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}_n$ و $n \leq ۳$. آنگاه $x \prec_{rl} y$ اگر وتنها اگر $x \prec_m y$.*

اثبات. $\Longrightarrow$: با استفاده از لم (۲.۲) واضح است.
$\Longleftarrow$: فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}_n$، $n \leq ۳$ و $x \prec_{rl} y$.

- اگر $n = ۱$،آنگاه اثبات بدیهی است،
- فرض کنید $n = ۲$. اگر $a = (a_۱, a_۲)$، $b = (b_۱, b_۲)$ و $a \prec_{rl} b$، آنگاه چون $a \prec_l b$ بنا به گزاره (۱٫۳) داریم $a_۱^{\downarrow} \leq b_۱^{\downarrow}$، و چون $a \prec_r b$ همچنین $tr(a) = tr(b)$ پس $a \prec_m b$.
- فرض کنید $n = ۳$. اگر $a = (a_۱, a_۲, a_۳)$، $b = (b_۱, b_۲, b_۳)$ و $a \prec_{rl} b$، آنگاه چون $a \prec_l b$، گزاره (۱٫۳) نتیجه می دهد که $a_۳^{\downarrow} \geq b_۳^{\downarrow}$ و $a_۱^{\downarrow} \leq b_۱^{\downarrow}$. از اینکه $a \prec_r b$، گزاره (۱٫۱) نتیجه می دهد که

$$a_۱^{\downarrow} + a_۲^{\downarrow} + a_۳^{\downarrow} = b_۱^{\downarrow} + b_۲^{\downarrow} + b_۳^{\downarrow}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} a_1^{\downarrow} + a_2^{\downarrow} + a_3^{\downarrow} &= b_1^{\downarrow} + b_2^{\downarrow} + b_3^{\downarrow} \\ &\leq b_1^{\downarrow} + b_2^{\downarrow} + a_3^{\downarrow} \end{aligned}$$

پس

$$a_1^{\downarrow} + a_2^{\downarrow} \leq b_1^{\downarrow} + b_2^{\downarrow}$$

لذا $a \prec_m b$.

□

گزاره ۵.۲. *فرض کنید $n = 4$ و $x \sim_{rl} y$. آنگاه*

۱. $y \prec_m x$ *اگر وتنها اگر* $x_2^{\downarrow} \leq y_2^{\downarrow}$،

۲. $y \prec_m x$ *یا* $x \prec_m y$.

اثبات. ۱. فرض کنید $y \sim_{rl} x$، پس بنا به گزاره (۱.۳)، $x_1^{\downarrow} = y_1^{\downarrow}$ و $x_4^{\downarrow} = y_4^{\downarrow}$. اکنون اگر $y \prec_m x$ آنگاه $x_1^{\downarrow} + x_2^{\downarrow} \leq y_1^{\downarrow} + y_2^{\downarrow}$ و لذا $x_2^{\downarrow} \leq y_2^{\downarrow}$. بالعکس فرض کنید $x_2^{\downarrow} \leq y_2^{\downarrow}$. جون $x_1^{\downarrow} = y_1^{\downarrow}$ لذا $x_1^{\downarrow} + x_2^{\downarrow} \leq y_1^{\downarrow} + y_2^{\downarrow}$. از طرفی $tr(x) = tr(y)$ و $x_4^{\downarrow} = y_4^{\downarrow}$ نتیجه می دهد که $x_1^{\downarrow} + x_2^{\downarrow} + x_3^{\downarrow} = y_1^{\downarrow} + y_2^{\downarrow} + y_3^{\downarrow}$. بنابراین $x \prec_m y$.

۲. طبق قسمت الف اگر $x_2^{\downarrow} \leq y_2^{\downarrow}$ آنگاه $y \prec_m x$ و در غیر این صورت $y \prec_m x$.

□

قضیه ۶.۲. *فرض کنید $a \in \mathbb{R}_n$. در این صورت بردار $\overline{a} \in \mathbb{R}_n$ وجود دارد که*

$$\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} a\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{a}\}. \tag{۱.۲}$$

اثبات. فرض کنید $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_n$. اگر $n \le 3$ بنا بر قضیه (۲/۴) با انتخاب $\overline{a} = a$ اثبات کامل است. در ادامه برهان فرض می کنیم $n \ge 4$. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم مولفه های بردار a بصورت نزولی مرتب شده است یعنی

$$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n.$$

اثبات را در سه حالت کامل می کنیم.

- حالت اول: ابتدا فرض کنیم $a_n \ge 0$. اگر $a_1 = a_n$ در این صورت با انتخاب $\overline{a} = a$ اثبات تمام است. در صورتی که $a_1 > a_n$، بنا به الگوریتم تقسیم عدد طبیعی مانند m و عدد حقیقی مانند r وجود دارد که $1 \le m < n$، $0 \le r < a_1 - a_n$ و

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_n) = m(a_1 - a_n) + r. \qquad (۲.۲)$$

بردار $\overline{a}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\overline{a} := (\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{m}, a_n + r, \underbrace{a_n, a_n, ..., a_n}_{n-m-1}) \qquad (۳.۲)$$

ادعا ۱: $a \sim_{rl} b$.

اثبات ادعا ۱: فرض کنیم $\overline{a} = (b_1, ..., b_n)$. در این صورت

$$\max_{1\le i\le n}\{b_i\} = \max_{1\le i\le n}\{a_i\} = a_n \text{ و } \min_{1\le i\le n}\{b_i\} = \max_{1\le i\le n}\{a_i\} = a_1.$$

لذا بنابر گزاره (۱/۳) داریم $a \sim_l \overline{a}$. از طرفی از رابطه (۱/۱) براحتی داریم

$$a - a_n e \prec_m (a_1 - a_n)\sum_{i=1}^{m} e_i + r e_{m+1}$$

و بنا بر قضیه (۱/۷) ماتریس تصادفی دوگانه مانند D وجود دارد بطوریکه

$$a - a_n e = (a_1 - a_n)\sum_{i=1}^{m} e_i + re_{m+1}D.$$

پس

$$\begin{aligned} a &= (a_1 - a_n)\sum_{i=1}^{m} e_i + re_{m+1}D + a_n e \\ &= (a_1 - a_n)\sum_{i=1}^{m} e_i + re_{m+1}D + a_n eD \\ &= \overline{a}D, \end{aligned}$$

لذا $a \prec_r \overline{a}$. برای اثبات ادعا کافیست نشان دهیم $\overline{a} \prec_r a$. اکنون ماتریس مربعی R را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$.R := \frac{1}{tr(\overline{a})}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

واضح است که R یک ماتریس تصادفی سطری است و $\overline{a} = aR$، پس $\overline{a} \prec_r a$ و لذا ادعا اثبات شد.

اکنون برای اتمام اثبات حالت اول نشان می دهیم

$$A := \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} \overline{a}\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{a}\} := B.$$

بنا بر لم (۲/۲) بدیهی است که $A \subseteq B$، حال نشان می دهیم که $B \subseteq A$. بدون اینکه خللی به

کلیت وارد شود فرض می‌کنیم $x = (x_۱, ..., x_n) \in A$ و

$$x_۱ \geq x_۲ \geq \ldots \geq x_m \geq x_{m+۱} \geq x_{m+۲} \geq \ldots \geq x_n.$$

چون $\overline{a} \prec_l x$، لذا $a_n \leq x_i \leq a_۱$ برای همه $۱ \leq i \leq n$. در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i \leq k a_۱, \qquad \forall k = ۱, ..., m, \tag{۴.۲}$$

و

$$\sum_{i=k}^{n} x_i \geq (n-k+۱) a_n, \qquad \forall k = m+۲, ..., n. \tag{۵.۲}$$

چون $x \in A$ پس $tr(x) = tr(\overline{a})$ و از رابطه (۲٫۵) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=۱}^{m+۱} x_i &= tr(x) - \sum_{i=m+۲}^{n} x_i \\ &\leq tr(\overline{a}) - (n-m-۱) a_n \\ &= m a_۱ + a_n + r \end{aligned}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i \leq m a_۱ + a_n + r + (k-m-۱) a_n, \qquad \forall k = m+۲, ..., n.$$

در نتیجه بنابر قضیه (۱٫۱) $x \prec_m \overline{a}$ یعنی $x \in B$. پس

$$\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} \overline{a}\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{a}\},$$

و از آنجاییکه $a \sim_{rl} \overline{a}$، بنابراین در این مرحله اثبات کامل است.

- حالت دوم: فرض کنید $a_۱ \leq ۰$. لذا $-a$ در شرط حالت اول صدق می کند بنابراین وجود دارد $\overline{-a} \in \mathbb{R}_n$ که

$$\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} -a\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{-a}\},$$

و با استفاده از دو رابطه

$$x \prec_r y \Leftrightarrow -x \prec_r -y \quad \text{و} \quad x \prec_l y \Leftrightarrow -x \prec_l -y$$

داریم

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} a\} &= \{x \in \mathbb{R}_n : -x \prec_{rl} -a\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}_n : -x \prec_m \overline{-a}\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m -\overline{-a}\}.\end{aligned}$$

لذا در این مرحله هم اثبات کامل است.

- حالت سوم: فرض کنید $a_n < ۰ < a_۱$. بنا به الگوریتم تقسم اعداد طبیعی $m_۱$ و $m_۲$ و اعداد حقیقی r و r' وجود دارد که $۰ \leq r < a_۱$، $۰ \leq r' < -a_n$،

$$\sum_{a_i>۰} a_i = m_۱ a_۱ + r \tag{۶.۲}$$

و

$$-\sum_{a_i<۰} a_i = m_۲(-a_n) + r'.$$

پس

$$\sum_{a_i<0} a_i = m_2 a_n + s$$

که در آن $s = -r'$ و $a_n < s \leq 0$. اکنون بردار $\overline{a} = (b_1, ..., b_n)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$b_i := \begin{cases} a_1, & 1 \leq i \leq m_1 \text{ اگر } \\ r, & i = m_1 + 1 \text{ اگر } \\ s, & i = n - m_2 \text{ اگر } \\ a_n, & n - m_2 + 1 \leq i \leq n \text{ اگر } \\ 0, & \text{بقیه جاها} \end{cases},$$

بعبارت بهتر $\overline{a}$ بصورت زیر می باشد

$$\overline{a} := (\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{m_1}, r, 0, .., 0, s, \underbrace{a_n, a_n, ..., a_n}_{m_2}). \qquad (۷.۲)$$

ادعا ۲: $a \sim_{rl} \overline{a}$.

اثبات ادعا ۲: فرض کنیم $\overline{a} = (b_1, ..., b_n)$. در این صورت

$$\max_{1\leq i\leq n}\{b_i\} = \max_{1\leq i\leq n}\{a_i\} = a_n \text{ و } \min_{1\leq i\leq n}\{b_i\} = \max_{1\leq i\leq n}\{a_i\} = a_1,$$

لذا بنابر گزاره (۱٫۳) داریم $a \sim_l \overline{a}$. اکنون ماتریس های مربعی

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$R_j := \begin{cases} \frac{1}{m_1 a_1 + r} \sum_{a_i > 0} a_i e_i, \ 1 \leq j \leq m_1 + 1 & \text{اگر} \\ \frac{1}{m_2 a_n + s} \sum_{a_i < 0} a_i e_i, \ m_1 + 1 < j \leq n & \text{اگر} \end{cases}$$

$$S_j := \begin{cases} \frac{a_1}{m_1 a_1 + r} \sum_{i=1}^{m_1} e_i + \frac{r}{m_1 a_1 + r} e_{m_1 + 1}, \ a_j > 0 & \text{اگر} \\ \frac{s}{m_2 a_n + s} e_{n - m_2} + \frac{a_n}{m_2 a_n + s} \sum_{i=1}^{m_2} e_{n+1-i} a_j, \ a_j \leq 0 & \text{اگر}. \end{cases}$$

در این صورت R و S دو ماتریس سطری تصادفی می باشند و $a = bR$ و $b = aS$. لذا $a \prec_r \overline{a}$ و $\overline{a} \prec_r a$، پس $a \sim_{rl} \overline{a}$، و ادعا اثبات شد.

اکنون برای اتمام اثبات حالت سوم نشان می دهیم

$$C := \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} \overline{a}\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{a}\} := E.$$

بنا به لم (۲٫۲) بدیهی است که $E \subseteq C$، حال نشان می دهیم که $C \subseteq E$. بدون اینکه خللی به کلیت وارد شود فرض می کنیم $x = (x_1, ..., x_n) \in C$ و $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$. چون $x \prec_l \overline{a}$،

لذا $a_n \leq x_i \leq a_۱$ برای همه $i(۱ \leq i \leq n)$. در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i \leq \sum_{i=۱}^{k} a_۱ = ka_۱ = \sum_{i=۱}^{k} b_i, \qquad \forall k = ۱, ..., m_۱.$$

همچنین برای هر k $(m_۱ + ۱ \leq k \leq n - m_۲ - ۱)$ داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i \leq \sum_{x_i > ۰} x_i \leq \sum_{b_i > ۰} b_i = m_۱ a_۱ + r = \sum_{i=۱}^{k} b_i,$$

و از اینکه $tr(x) = tr(\overline{a})$ داریم

$$\sum_{i=۱}^{k} x_i = tr(x) - \sum_{i=k+۱}^{n} x_i \leq tr(\overline{a}) - \sum_{i=k+۱}^{n} b_i = \sum_{i=۱}^{k} b_i,$$

برای همه $k(n - m_۲ \leq k \leq n)$. در نتیجه بنابر قضیه (۱/۱) $x \prec_m \overline{a}$ یعنی $x \in E$. پس

$$\{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_{rl} \overline{a}\} = \{x \in \mathbb{R}_n : x \prec_m \overline{a}\},$$

و از آنجاییکه $a \sim_{rl} \overline{a}$، بنابراین این مرحله نیز اثبات شد و در نتیجه اثبات قضیه کامل است.

□

لم ۷.۲. *فرض کنید $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ نگهدارنده خطی رابطه مهتر $\prec_{rl}$ باشد. آنگاه مجموعه*

$$W = \{x \in \mathbb{R}_n : tr(x) = ۰\}$$

یک زیر فضای $n - ۱$ بعدی و پایا تحت تبدیل T است.

اثبات. بخاطر ساده بودن برهان اینکه W یک زیر فضای $n-1$ بعدی است و مجموعه

$$\alpha_i = \{e_i - e_j : i \neq j, 1 \leq j \leq n\},$$

یک پایه برای W است برای همه $i(1 \leq i \leq n)$، ما فقط ثابت می کنیم W تحت T پایاست. اگر $x \in W$، آنگاه $tr(x) = 0$ و لذا $x \prec_{rl} o$، که در آن منظور از o بردار n بعدی است که همه مولفه های آن برابر با صفر می باشند. چون T نگهدارنده خطی رابطه مهتر $\prec_{rl}$ است بنابراین

$$o = T(0) \prec_{rl} T(x)$$

و لذا $tr(T(x)) = 0$، پس $T(x) \in W$ یعنی W زیرفضایی T-پایاست. □

قضیه ۸.۲. *فرض کنید $T : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت T نگهدارنده رابطه مهتر $\prec_{rl}$ است اگر وتنها اگر دارای یکی از فرم های زیر باشد:*

1. *وجود داشته باشد $a \in \mathbb{R}_n$، بطوریکه $T(x) = tr(x)a$ برای همه $x \in \mathbb{R}_n$،*
2. *$n \leq 3$ و وجود داشته باشد ماتریس جایگشت P و اعداد حقیقی r, s بطوریکه*

$$T(x) = rxP + sxJ$$

برای همه $x \in \mathbb{R}_n$،

3. *$n \geq 4$ و وجود داشته باشد ماتریس جایگشت P و عدد حقیقی r، بطوریکه $T(x) = rxP$، برای همه $x \in \mathbb{R}_n$.*

اثبات. اگر $n \leq 3$، آنگاه بنا بر (۲.۲) رابطه های $\prec_m$ و $\prec_{rl}$ معادلند ولذا برهان از قضیه (۱.۸) بدست می آید. در ادامه برهان فرض می کنیم $n \geq 4$. اگر T به یکی از صورت های ۱ یا ۳ باشد، آنگاه براحتی دیده می شود که T نگهدارنده خطی $\prec_{rl}$ است. اکنون فرض کنیم T نگهدارنده خطی $\prec_{rl}$ باشد، نشان می دهیم که T به یکی از صورت های ۱ یا ۳ می باشد. برای اتمام اثبات دو حالت به صورت زیر در نظر می گیریم.

• حالت اول: ابتدا فرض کنیم که تحدید تبدیل خطی T به زیرفضای W یعنی $T|_W$ تبدیلی وارونپذیر نباشد، و

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

ماتریس نمایش T در پایه استاندارد باشد، که در آن A_i سطر i-ام ماتریس A است برای همه i $(1 \leq i \leq n)$. در این حالت برداری ناصفر مانند $b = (b_1, ..., b_n) \in W$ وجود دارد که $T(b) = bA = 0$. عدد ناصفر α را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$\alpha := \sum_{b_i > 0} b_i = -\sum_{b_i < 0} b_i.$$

چون $\alpha > 0$، عدد $0 < \epsilon < 1$ را می توان طوری انتخاب نمود که

$$\min_{1 \leq i \leq n} b_i \leq -\epsilon\alpha < \epsilon\alpha \leq \max_{1 \leq i \leq n} b_i,$$

لذا

$$\epsilon\alpha(e_1 - e_2) \prec_l b. \tag{8.2}$$

ماتریس های مربعی

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$R_i := \begin{cases} e_1, \ b_i \geq 0 & \text{اگر} \\ e_2, \ b_i < 0 & \text{اگر} \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$S_i := \begin{cases} \epsilon e_1 + (1-\epsilon)e_3, \ i = 1 & \text{اگر} \\ \epsilon e_2 + (1-\epsilon)e_3, \ 2 \leq i \leq n & \text{اگر}. \end{cases}$$

در این صورت ماتریس های R و S و لذا ماتریس RS ماتریس های تصادفی سطری می باشند و داریم

$$b(RS) = \alpha(e_1 - e_2)S = \epsilon\alpha(e_1 - e_2),$$

بنابراین

$$\epsilon\alpha(e_1 - e_2) \prec_r b. \tag{۹.۲}$$

از روابط (۲٫۸) و (۲٫۹) نتیجه می شود که $\epsilon\alpha(e_1 - e_2) \prec_{rl} b$. چون T حافظ $\prec_{rl}$ است پس

$$\epsilon\alpha T(e_1 - e_2) \prec_{rl} T(b) = o.$$

و از آنجاییکه $\epsilon\alpha \neq ۰$، $T(e_۱ - e_۲) = o$. همچنین از رابطه

$$e_۱ - e_i \prec_{rl} e_۱ - e_۲$$

و اینکه T نگهدارنده $\prec_{rl}$ است نتیجه می شود که $T(e_۱ - e_i) = o$، برای همه $i(۱ \leq i \leq n)$. بنابراین چون $T(e_i) = A_i$، لذا $A_i = A_۱$ برای همه $i(۱ \leq i \leq n)$. در نتیجه با فرض $a := A_۱$ داریم

$$T(x) = xA = tr(x)a$$

برای همه $x \in \mathbb{R}_n$.

- حالت دوم: فرض کنیم که تحدید تبدیل خطی T به زیرفضای W یعنی $T|_W$ تبدیلی وارونپذیر باشد و

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ \; A_۲ \; \ldots \; A_n \end{bmatrix}$$

ماتریس نمایش T در پایه استاندارد باشد، که در آن A_i ستون i-ام ماتریس A است برای همه $i(۱ \leq i \leq n)$. ابتدا نشان می دهیم که $A_k^t \notin span(e)$، برای هر $k(۱ \leq k \leq n)$، زیرا اگر وجود داشته باشد یک $k \in \{۱, .., n\}$ که $A_k^t \in span(e)$ آنگاه

$$T(e_i - e_j) \in \{x \in \mathbb{R}_n : x_k = ۰\},$$

برای همه $i, j(۱ \leq i, j \leq n)$ که در آن $x = (x_۱, ..., x_n)$. بنابراین

$$W = T(W) \subset \{x : x_k = ۰\}.$$

که در آن $x = (x_۱, ..., x_n)$، لذا $dim(W) < n - ۱$ که تناقض می باشد. بنابراین $A_k^t \notin span(e)$،

برای هر $k(1 \leq k \leq n)$. اکنون فرض کنیم که

$$||A_j^t|| = \max\{||A_i^t|| : 1 \leq i \leq n\},$$

که در آن منظور از $||.||$ نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}_n$ می باشد. اگر $P \in P_n$، $x = A_j^t$ و $y = A_j^t$، آنگاه $x \sim_{rl} y$،

$$T(x) = xA = (A_j^t.A_1^t, ..., A_j^t.A_n^t)$$

و

$$T(y) = yA = (A_j^t P.A_1^t, ..., A_j^t P.A_n^t)$$

که در آن منظور از . ضرب داخلی استاندارد دو بردار است. چون $x \sim_{rl} y$، پس $T(x) \sim_{rl} T(y)$ و بنابراین وجود دارد $k(1 \leq k \leq n)$ که

$$||A_j^t||^2 = \max T(x) = \max T)y) = A_j^t P.A_k^t,$$

طبق نامساوی کشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned} ||A_j^t||^2 = |A_j^t P.A_k^t| &\leq ||A_j^t P|| ||A_k^t|| \\ &\leq ||A_j^t|| ||A_j^t|| = ||A_j^t||^2. \end{aligned}$$

بنابراین

$$|A_j^t P.A_k^t| = ||A_j^t P|| ||A_k^t||,$$

و از اینکه تساوی، در نامساوی کشی- شوارتز رخ داده است لذا اسکالر α_p وجود دارد که $A_k^t =$

$\alpha_P A_j^t P$. پس

$$\begin{aligned} ||A_j^t||^۲ &= ||A_j^t P||||A_k^t|| \\ &= ||A_j^t P||||\alpha_P A_j^t P|| \\ &= |\alpha_P|||A_j^t||^۲. \end{aligned}$$

بنابراین $|\alpha_P| = ۱$ و لذا $\alpha_P \in \{+۱, -۱\}$، و $A_k = \alpha_P P^t A_j$. در نتیجه

$$\{\alpha_P P^t A_j : P \in P_n\} \subseteq \{A_۱, ..., A_n\}.$$

یعنی مجموعه

$$\{\alpha_P P^t A_j : P \in P_n\}$$

حداکثر n عضو متمایز دارد. چون $A_j \notin span(e)$، مجموعه مولفه های A_j حداقل دو عضو متمایز دارد، اکنون ادعا می کنیم که این مجموعه دقیقا دارای دو عضو متمایز می باشد، زیرا در صورتی که مجموعه مولفه های A_j حداقل سه عضو متمایز داشته باشد آنگاه مجموعه $\{PA_j : P \in P_n\}$ حداقل دارای $n(n-۱)$ عضو متمایز می باشد و ازآنجا مجموعه

$$\mathcal{A}_j := \{\alpha_P P^t A_j : P \in P_n, \alpha_P \in \{۱, -۱\}\}$$

حداقل دارای $\frac{n(n-۱)}{۲}$ عضو متمایز می باشد، لذا $\frac{n(n-۱)}{۲} \leq n$، و این با $n \geq ۴$ تناقض دارد. لذا مجموعه مولفه های A_j دقیقا دارای دو عضو متمایز مانند a, b می باشد.

ادعا ۳: مولفه های A_j دقیقا شامل دو عضو متمایز a و b باشند که یکی از دو عضو دقیقا در یک مولفه A_j قرار دارد.

اثبات ادعا ۳: با برهان خلف ثابت می‌کنیم ادعا درست می باشد. فرض‌کنیم مولفه های A_j شامل دو عضو متمایز a و b باشند که هر کدام حداقل دوبار تکرار شده باشند. در این صورت اگر $n > ۵$،

آنگاه مجموعه $\mathcal{A}_j$ حداقل $\frac{n(n-۱)}{۴}$ عضو متمایز دارد که با $n \leq \frac{n(n-۱)}{۴}$ تناقض دارد. اگر $n = ۵$، آنگاه مجموعه $\mathcal{A}_j$ حداقل دارای ۱۰ عضو متمایز می باشد که تناقض می باشد. اگر $n = ۴$ و a و b هر کدام حداقل دو بار تکرار شده باشند، آنگاه می توانیم فرض کنیم $PA_j^t = (a, a, b, b)$. در صورتی که $a \neq -b$، مجموعه $\mathcal{A}_j$ حداقل دارای ۶ عضو متمایز می باشد که تناقض است و در صورتی که $a = -b$ و مجموعه $\mathcal{A}_j$ کمتر از ۴ عضو متمایز داشته باشد، بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد $a > ۰$ و ماتریس A بصورت زیر است

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a_{۱۴} \\ a & -a & -a & a_{۲۴} \\ -a & -a & a & a_{۳۴} \\ -a & a & -a & a_{۴۴} \end{bmatrix}.$$

از آنجاییکه $A_۴ \sim_r A_i$ برای هر $i(۱ \leq i \leq ۴)$، پس لزوما $A_۴^t = (-۲a, ۲a, ۲a, ۲a)^t$، و این تناقض دارد با اینکه $PA_j^t = (a, a, -a, -a)$. لذا مولفه های A_j دقیقا شامل دو عضو متمایز a و b باشند که یکی از دو عضو مانند a دقیقا در یک مولفه A_j ظاهر شده است. بنابراین برهان ادعا تکمیل است.

ماتریس جایگشت $P \in P_n$ و اعدادحقیقی و متمایز a, b وجود دارد که $PA_j = (a, b, b, ..., b)$. برای اتمام اثبات کافیست نشان دهیم $b = ۰$. بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می کنیم $P = I$، لذا

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots b & a \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم

$$x = (-۴, -۲, ۴, ۰, ..., ۰), \quad y = (-۴, -۱, -۱, ۴, ۰, ..., ۰)$$

چون $x \sim_{rl} y$، پس $xA \sim_{rl} yA$ یعنی

$$\begin{aligned} xA &= (-۴a + ۲b, -۲a, ۴a - ۶b, -۲b, ..., -۲b) \\ &\sim_{rl} (-۴a + ۲b, -a - b, -a - b, ۴a - ۶b, -۲b, ..., -۲b) = yA. \end{aligned}$$

از اینکه $|xA| = |yA|$ نتیجه می گیریم که $|a + b| = |b| + |a|$، یعنی $ab \geq ۰$. علاوه براین اگر $b \neq ۰$ دو بردار u و v را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} u &= (\frac{-۷a}{۲b} - \frac{۱۷}{۲}, ۳, ۴, ۵, ۰, ..., ۰), \\ v &= (\frac{-۷a}{۲b} - \frac{۱۷}{۲}, ۲, ۵, , ۵, ۰, ..., ۰). \end{aligned}$$

چون $u \sim_{rl} v$، پس $uA \sim_{rl} vA$. از طرفی

$$uA = (\frac{-۷a^۲ - ۱۷ab}{۲b} + ۱۲b, \frac{b - a}{۲}, \frac{a - b}{۲}, \frac{۳a - ۳b}{۲}, \frac{۷b - ۷a}{۲}, ..., \frac{۷b - ۷a}{۲})$$

و

$$vA = (\frac{-۷a^۲ - ۱۷ab}{۲b} + ۱۲b, \frac{۳b - ۳a}{۲}, \frac{۳a - ۳b}{۲}, \frac{۳a - ۳b}{۲}, \frac{۷b - ۷a}{۲}, ..., \frac{۷b - ۷a}{۲}).$$

از اینکه $|uA| = |vA|$ نتیجه می گیریم که

$$|\frac{b}{۲} - \frac{a}{۲}| + |\frac{b}{۲} - \frac{a}{۲}| = |\frac{۳b}{۲} - \frac{۳a}{۲}| + |\frac{۳b}{۲} - \frac{۳a}{۲}|$$

در نتیجه $2|a-b| = 0$ و لذا $a = b$، که تناقض می باشد. بنا براین $b = 0$ و لذا ماتریس A باید بصورت $A = aP$ باشد که در آن $P \in P_n$. در نتیجه اثبات قضیه کامل است.

□

مراجع

[۱] ع. آرمندنژاد، مروری بر مهترهای عادی و تعمیم یافته و بررسی ساختار نگهدارنده های خطی آنها، *فرهنگ و اندیشه ریاضی* ۵۴ (۱۳۸۹)، ۳۱–۴۰.

[2] T. Ando, Majorization and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.*, **199** (1978), 17–67.

[3] A. Armandnejad and Z. Gashool, Strong linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **123** (2012), 115–121.

[4] A. Armandnejad, S. Mohtashami, and M. Jamshidi, On linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$, *Linear Algebra and its Applications*, **459** (2014), 145–153.

[5] A. Armandnejad and A. Salemi, On linear preservers of lgw-majorization on $\mathrm{M}_{n,m}$, *Bulletin of the Malaysian Mathmatical Society*, **35**(3) (2012), 755–764.

[6] R. Bahatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] L.B. Beasley, S.G. Lee and Y. H. Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization, *Linear Algebra and its Applications*, **367** (2003), 341–346.

[8] R.A. Brualdi and G. Dahl, An extension of the polytope of doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **6**(3) (2013), 393–408.

[9] H. Chiang and C.K. Li, Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers, *Linear and Multilinear Algebra*, **53** (2005), 1–11.

[10] G. Dahl, Matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **288** (1999), 53–73.

[11] D.M. Francisco, G.M. Pedro and E.S. Luis E, Weak matrix majorization, *Linear Algebra and its Applications*, **403** (2005), 343–368.

[12] M.H. Hadian and A. Armandnejad, $\mathcal{B}$-majorization and its linear preservers, *Linear Algebra and its Application*, **478** (2015), 218-227.

[13] A.M. Hasani and A. Ilkhanizadeh Manesh, Linear preservers of two-sided right matrix majorization on $\mathbb{R}_n$, *Adv. Oper. Theory*, **3**(3) (2018), 1–8.

[14] A.M. Hasani and M. Radjabalipour, The structure of linear operators strongly preservingmajorizations of matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15** (2006), 260–268.

[15] A.M. Hasani and M. Radjabalipour, On linear preservers of (right) matrix majorization, *Linear Algebra and its Applications*, **423** (2007), 255–261.

[16] M. Marcus, All linear operators leaving the unitary group invariant, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 155–163.

[17] A.W. Marshall, I. Olkin and B.C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York, 2011.

[18] F. Khalooei and A. Salemi, The Structure of linear preservers of left matrix majorization on $\mathbb{R}^p$, *Electronic Journal of Linear Algebra*, **18** (2009), 88–97.