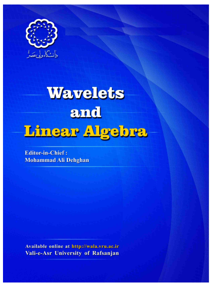
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۷-۳۶



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

تعامد متساوی‌الساقین یکانی از نوع هرمیت-هادامارد در فضاهای نرمدار

مهدی دهقانی[*آ]

[آ]*گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، اصفهان، ایران*

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۱ فروردین ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۴ آذر ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: عباس سالمی

کلمات کلیدی:
فضای ضرب داخلی،
تعامد، تعامد
برکوف-جیمز، تعامد
متساوی‌الساقین از نوع
هرمیت-هادامارد.

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم تعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمیت-هادامارد (تعامد HH−I) و نسخهٔ یکانی آن در فضاهای نرمدار حقیقی، مشخصه‌سازی جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم. در واقع، یک شرط لازم و کافیِ ضعیف‌تر از همگن بودنِ تعامد HH−I در فضای نرمدار حقیقی و حداقل ۳-بعدی X به‌دست می‌آوریم که تحت آن، نرم X از یک ضرب داخلی القا می‌شود.

[*]نویسنده مسئول

۱. مقدمه

هندسهٔ فضاهای اقلیدسی بر دو مفهوم طول و زاویه استوار است که در بُعد ۳ و کمتر، شهود هندسی مناسبی از این دو در دست داریم. در فضاهای اقلیدسی، تعریف هندسیِ ضرب داخلی دو بردار عبارت است از اندازهٔ تصویر یکی از دو بردار بر روی دیگری که البته این تعریف به زاویهٔ بین دو بردار وابسته است. در فضاهای با بُعد بالاتر ابزارهای جبری را برای مشخصه‌سازی ویژگی‌های هندسیِ فضا به‌کار می‌گیریم. در واقع، تعریف جبریِ ضرب داخلی در این فضاها ابزار مناسبی برای شناخت هندسهٔ آن‌ها در اختیار ما قرار می‌دهد. به‌ویژه، مفهوم تعامد ابزار قدرتمندی در آنالیز تابعی، نظریهٔ تقریب، آنالیز فوریه، نظریهٔ موجک‌ها، نظریهٔ پردازش تصویر و سایر علوم وابسته به آن‌ها است. همچنین این مفهوم، نقشی کلیدی در شناخت ویژگی‌های هندسیِ فضاهای نرمدار ایفا می‌کند [۱۱، ۱۸].

همانطور که می‌دانیم در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ تنها یک رابطهٔ تعامد وجود دارد که از ضرب داخلی حاصل می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد است اگر $\langle x, y\rangle = 0$ (در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp y$). برخی ویژگی‌های اساسی تعامد در فضاهای ضرب داخلی عبارتند از

الف) ناتباهیدگی : $x \perp x$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) همگنی (همگن بودن): اگر $x \perp y$، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $\alpha x \perp \beta y$؛

پ) تقارن (متقارن بودن): اگر $x \perp y$، آن‌گاه $y \perp x$؛

ت) پیوستگی: فرض کنیم دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X چنان باشند که $x_n \to x$ و $y_n \to y$. در این‌صورت اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \perp y_n$، آن‌گاه $x \perp y$؛

ث) جمعی بودن: اگر $x \perp y$ و $x \perp z$، آن‌گاه $x \perp (y+z)$؛

ج) ویژگی وجودی (وجودی بودن): برای هر دو بردار مستقل خطی $x, y \in X$، عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x \perp (\alpha x + y)$. این ویژگی، وجود دو بردار ناصفر عمود برهم در هر زیرفضای دوبعدی از X را تضمین می‌کند.

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ (فضای نرمدار حقیقی) باشد. زمانی‌که نرم X از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، مفهوم تعامد روی X یکتا نیست. در طول قرن بیستم مفاهیم گوناگونی از تعامد در فضاهای نرمدار به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان معرفی و مورد مطالعه قرار

آدرس ایمیلها: m.dehghani@kashanu.ac.ir (مهدی دهقانی).

http://doi.org/10.22072/wala.2020.124373.1278

گرفته است. مشهورترینِ آن‌ها تعامد بِرکوف-جیمز [۱] است. در سال ۱۹۳۵ بِرکوف[۲] [۹] اشاره‌ای به این تعامد در فضاهای نرمدار داشت. پس از آن جیمز [۳] [۲۰] با الهام از ایده‌های برکوف، این مفهوم جدید از تعامد در فضاهای نرمدار را گسترش داد و ویژگی‌های بیشتر و دقیق‌تری از آن ارائه کرد. او مشخصه‌سازی‌های فراوانی از ویژگی‌های هندسی فضاهای نرمدار، به ویژه، اکیداً محدب بودن و هموار بودن آن‌ها را به‌وسیلهٔ این تعامد به‌دست آورد (مطالعهٔ [۱] پیشنهاد می‌شود). این تعامد به افتخار برکوف و جیمز تعامد برکوف-جیمز نامیده شده است.

- بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامدِ برکوف-جیمز است، اگر

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp_B y$.

اگر دو بردار x و y در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ بر هم عمود باشند (یعنی $x \perp y$)، آن‌گاه طول بردارهای $x - y$ و $x + y$ برابرند. در واقع، بردارهای $x - y$ و $x + y$ قطرهای مستطیلی هستند که بردارهای x و y طول و عرض آن‌را تشکیل می‌دهند. جیمز [۲۱] با الهام از این ویژگی هندسی تعامد در فضاهای اقلیدسی، تعامد متساوی‌الساقین [۴] در فضاهای نرمدار را معرفی کرد.

- بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین است، اگر $\|x + y\| = \|x - y\|$. در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp_I y$.

برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر از تعامدهای ذکر شده و آشنایی با دیگر مفاهیم تعامد در فضاهای نرمدار، مطالعهٔ مراجع [۲، ۴، ۵، ۷، ۸، ۱۴، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۵، ۲۷] به خواننده پیشنهاد می‌شود.
نامساوی هرمیت-هادامارد[۵] برای تابع محدّب $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \|x\|^2$ عبارت است

---

[1] Birkhoff-James
[2] Birkhoff
[3] James
[4] isosceles
[5] Hermite-Hadamard

از

$$\|\frac{x+y}{2}\|^2 \leq \int_0^1 \|(1-t)x+ty\|^2 dt \leq \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}.$$

به کمک این نامساوی در [۲۳] ثابت شده است که $\|(x,y)\|_2 := (\int_0^1 \|(1-t)x+ty\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی $X \times X$ تعریف می‌کند. این نرم HH–۲–نرم نامیده شده است. برای مشاهدهٔ اطلاعات بیشتر در مورد $HH-p$–نرم‌ها ($1 \leq p < \infty$) مطالعهٔ [۲۳] پیشنهاد می‌شود.

در فضای نرمدار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$، اگر $x,y \in X$ چنان باشند که $(1-t)x \perp_I ty$ تقریباً همه‌جا روی بازهٔ $[0,1]$، آن‌گاه $\|(1-t)x-ty\| = \|(1-t)x+ty\|$ تقریباً همه‌جا روی $[0,1]$ که این نتیجه می‌دهد

$$\int_0^1 \|(1-t)x-ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(1-t)x+ty\|^2 dt.$$

همچنین در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$، به آسانی دیده می‌شود که

$$x \perp y \Leftrightarrow \int_0^1 \|(1-t)x-ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(1-t)x+ty\|^2 dt \quad (\forall x,y \in X).$$

با الهام از این واقعیت‌ها، نویسندگان در [۱۷] بر اساس HH–۲–نرم‌ها، تعامد جدیدی در فضاهای نرمدار تعریف کرده‌اند که به تعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمت–هادامارد (تعامد HH–I) معروف شده است.

- در فضای نرمدار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین از نوع هرمت–هادامارد است، اگر

$$\int_0^1 \|(1-t)x-ty\|^2 dt = \int_0^1 \|(1-t)x+ty\|^2 dt.$$

در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp_{HH-I} y$. برای آشنایی بیشتر با تعامدهای از نوع هرمیت–هادامارد

[۱۶، ۱۷، ۲۴] را ببینید.

همانطور که می‌دانیم فضاهای ضرب داخلی ویژگی‌های هندسی خاصی دارند که در فضاهای نرمداری که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، برقرار نیستند. از این‌رو، در قرن بیستم مشخصه‌سازی‌های بسیاری از فضاهایی که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا می‌شود، به‌دست آمده است. اولین و مشهورترین آن‌ها در سال ۱۹۳۵ توسط جُردَن [6] و فون نیومن [7] به‌دست آمد. آن‌ها ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای این‌که نرم یک فضای نرمدار توسط یک ضرب داخلی القا شود، برقراری تساوی متوازی‌الاضلاع است [۲۲]. نتیجهٔ مستقیم این حقیقت، این استکه یک فضای نرمدار، فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر هر زیرفضای ۲-بعدی آن فضای ضرب داخلی باشد. روش‌های بسیاری برای مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی وجود دارد. یکی از مشهورترینِ این روش‌ها استفاده از مفهوم تعامد است. واضح استکه در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ تعامدهای برکوف-جیمز، متساوی‌الساقین و HH-I با تعامد حاصل از ضرب داخلی معادل هستند. همچنین توجه به این نکته ضروری استکه تعامدهای برکوف-جیمز و متساوی‌الساقین ویژگی‌های ناتباهیدگی، پیوستگی و وجودی بودن را دارند امّا ممکن است برخی از ویژگی‌های تعامد حاصل از یک ضرب داخلی را نداشته باشند. در واقع، تعامد متساوی‌الساقین متقارن است امّا تعامد برکوف-جیمز، در حالت کلی متقارن نیست. در حالی‌که تعامد برکوف-جیمز همگن است و تعامد متساوی‌الساقین، در حالت کلی همگن نیست. بر اساس این واقعیت‌ها، دی [8] [۱۵] و جیمز [۱۹، ۲۰، ۲۱] مشخصه‌سازی‌هایی از فضاهای ضرب داخلی به‌دست آورده‌اند. به ویژه، آن‌ها ثابت کردند که فضای نرمدار X، فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر تعامد متساوی‌الساقین در X همگن باشد. به‌علاوه، نتیجهٔ زیر از [۲۱] حائز اهمیت است.

قضیه ۱.۱. *[۲۱، قضیهٔ ۱] فرض کنیم X فضای نرمدار با بعد حداقل ۳ باشد. در این‌صورت X فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر تعامد برکوف-جیمز در X متقارن باشد.*

برای مشاهدهٔ نتایج بیشتر در این زمینه مطالعهٔ [۸] پیشنهاد می‌شود. امیر [9] در این کتاب بسیاری از مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی که بر اساس تعامدهای متفاوت به‌دست آمده را گردآوری کرده

[6]Jordan
[7]von Neumann
[8]Day
[9]Amir

است. سینگر [۱۰] در [۲۶] تعامد متساوی‌الساقین یکانی (تعامد سینگر) را معرفی کرد.

- بردارهای x و y در فضای نرمدار X متعامد متساوی‌الساقین یکانی هستند، اگر $\|x\|\,\|y\| = 0$ یا $\frac{x}{\|x\|} \perp_I \frac{y}{\|y\|}$. در این‌صورت می‌نویسیم $x \perp_{UI} y$.

برای مشاهدهٔ نتایج مربوط به این تعامد مطالعهٔ [۴، ۵] پیشنهاد می‌شود. در [۶، ۲۸] ویژگی‌های بیشتری از این تعامد و چند مشخصه‌سازی جدید برای فضاهای ضرب داخلی بر اساس آن به‌دست آمده است. به‌علاوه، نویسندگان در [۱۴، ۲۵] شکل کلی‌تری از این تعامد را معرفی کرده‌اند و بر اساس آن مشخصه‌سازی‌های جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی ارائه کرده‌اند. با الهام از تعریف سینگر، تعامد متساوی‌الساقین یکانی [۱۱] از نوع هرمیت–هادامارد (تعامد UHH–I) را به صورت زیر تعرف می‌کنیم:

تعریف ۲.۱. فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار حقیقی باشد. در این‌صورت گوییم بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد متساوی‌الساقین یکانی از نوع هرمیت–هادامارد است، اگر $\|x\|\,\|y\| = 0$ یا

$$\int_0^1 \left\|(1-t)\frac{x}{\|x\|} - t\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 dt = \int_0^1 \left\|(1-t)\frac{x}{\|x\|} + t\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 dt.$$

به عبارت دیگر

$$x \perp_{UHH-I} y \Leftrightarrow \|x\|\,\|y\| = 0 \quad \vee \quad \frac{x}{\|x\|} \perp_{HH-I} \frac{y}{\|y\|}.$$

ویژگی‌های اساسی تعامد HH–I در [۱۷] به‌دست آمده است. به‌ویژه، در این مقاله ثابت شده است که تعامد HH–I در فضای نرمدار حقیقی X همگن است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. علاوه‌بر این، مشخصه‌سازی‌های بیشتری از فضاهای ضرب داخلی براساس رابطهٔ تعامد HH–I و تعامد برکوف–جیمز در [۱۶] به‌دست آمده است. در این مقاله قصد داریم با استفاده از مفاهیم تعامد HH–I و تعامد UHH–I ، مشخصه‌سازی‌های جدیدی برای فضاهای ضرب داخلی به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا ویژگی‌های اساسی تعامد UHH–I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به ویژه، نشان می‌دهیم تعامد UHH–I ویژگی وجودی دارد. همچنین رابطهٔ این تعامد با تعامدهای برکوف–جیمز، متساوی‌الساقین یکانی و

[10] Singer
[11] Unitary isosceles orthogonality

HH–I را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس، با فرض این‌که بعد فضای نرمدار حقیقی X حداقل ۳ باشد، یک شرط لازم و کافی جدید که از همگن بودنِ تعامد HH–I ضعیف‌تر است، برای این‌که نرم X از یک ضرب داخلی القا شود، به‌دست می‌آوریم.

۲. تعامد UHH–I و مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که فضاهای نرمدار حقیقی هستند. ابتدا ویژگی‌های تعامد UHH–I در فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را بررسی خواهیم کرد. توجه می‌کنیم که این تعامد ناتباهیده است. زیرا اگر $x \in X$ چنان باشد که $x \perp_{UHH-I} x$ و $x \neq ۰$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} ۰ &= \int_۰^۱ \left[\left\|(۱-t)\frac{x}{\|x\|} + t\frac{x}{\|x\|}\right\|^۲ - \left\|(۱-t)\frac{x}{\|x\|} - t\frac{x}{\|x\|}\right\|^۲\right] dt \\ &= \int_۰^۱ [((۱-t)+t)^۲ - ((۱-t)-t)^۲] dt \\ &= \int_۰^۱ ۴t(۱-t) dt = \frac{۲}{۳} \end{aligned}$$

که امکان ندارد. همچنین باتوجه به این‌که تعامد HH–I ویژگی پیوستگی دارد، نتیجه می‌گیریم که تعامد UHH–I نیز ویژگی پیوستگی دارد. در [۱۷] ثابت شده است که تعامد HH–I تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. این واقعیت را در قضیهٔ بعد بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. *[۱۷، قضیهٔ ۶.۳] تعامد HH–I در فضای نرمدار X همگن است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد.*

امّا به سادگی دیده می‌شود که تعامد UHH–I در فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ همگن است. در حقیقت، اگر $x, y \in X$ بردارهایی باشند که $x \perp_{UHH-I} y$ و $\lambda > ۰$، آن‌گاه $\frac{x}{\|x\|} \perp_{HH-I} \frac{y}{\|y\|} = \frac{\lambda y}{\|\lambda y\|}$. این یعنی $x \perp_{UHH-I} \lambda y$. از طرفی واضح است که اگر $x \perp_{UHH-I} y$، آن‌گاه $x \perp_{UHH-I} -y$. بنابراین برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت $x \perp_{UHH-I} \lambda y$.

ذکر این نکته ضروری است که تعامد HH–I و تعامد UHH–I تنها در فضاهای ضرب داخلی معادل هستند. به بیان دیگر، تعامدهای HH–I و UHH–I در فضای نرمدار X معادل هستند اگر و تنها اگر X

فضای ضرب داخلی باشد. برای روشن شدن این واقعیت، ابتدا فرض می‌کنیم $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in X$. در این‌صورت

$$\int_{۰}^{۱} \|(۱-t)x \pm ty\|^{۲} dt = \frac{۱}{۳}(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲} \pm \langle x, y\rangle) \tag{۱.۲}$$

و

$$\int_{۰}^{۱} \left\|(۱-t)\frac{x}{\|x\|} \pm t\frac{y}{\|y\|}\right\|^{۲} dt = \frac{۱}{۳}(۲ \pm \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}) \tag{۲.۲}$$

و لذا به سادگی از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌شود که

$$x \perp_{HH-I} y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = ۰ \Leftrightarrow x \perp_{UHH-I} y.$$

اکنون فرض کنیم تعامدهای HH−I و UHH−I در فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ معادل باشند. از آنجایی که تعامد UHH−I در X همگن است، نتیجه می‌گیریم که تعامد HH−I نیز در X همگن است. بنابراین از قضیهٔ ۱.۲، نتیجه می‌شود که X یک فضای ضرب داخلی است. این حقیقت، تضمین می‌کند که این تعامدها در فضاهای نرمداری که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، معادل نیستند.

با توجه به این‌که تعامد متساوی‌الساقین نیز تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است (قضیهٔ ۷.۴ از [۱۹] را ببینید)، به روشی مشابه ثابت می‌شود که تعامد UHH−I و تعامد متساوی‌الساقین در فضای نرمدار X معادل هستند اگر تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد.

در قضیهٔ ۳.۳ از [۱۷] ثابت شده است که تعامد HH−I ویژگی وجودی دارد. با بهره‌گیری از ایدهٔ اثبات این مطلب، در لم بعد ثابت می‌کنیم که تعامد UHH−I نیز ویژگی وجودی دارد.

لم ۲.۲. *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد و $x, y \in X$ بردارهایی مستقل خطی باشند. در این‌صورت عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$.*

اثبات. فرض کنیم $x, y \in X$ مستقل خطی باشند. نگاشت پیوستهٔ $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت

$$\Phi(\lambda) = \int_{۰}^{۱} \varphi(\lambda, t)dt$$

تعریف می‌کنیم که در آن

$$\varphi(\lambda, t) = \Big\|(۱ - t)\frac{x}{\|x\|} + t\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲} - \Big\|(۱ - t)\frac{x}{\|x\|} - t\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲}.$$

در این‌صورت برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $t \in (۰, ۱)$ داریم

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda, t) &= \Big\|(۱ - t)\frac{x}{\|x\|} + t\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲} - \Big\|(۱ - t)\frac{x}{\|x\|} - t\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲}\\ &= (۱ - t)^{۲}\Big[\Big\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{t}{۱ - t}\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲} - \Big\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{t}{۱ - t}\frac{\lambda x + y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲}\Big]\\ &= (۱ - t)^{۲}\Big[\Big\|(\frac{۱}{\|x\|} + \frac{t}{۱ - t}\frac{\lambda}{\|\lambda x + y\|})x + \frac{t}{۱ - t}\frac{y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲}\\ &- \Big\|(\frac{۱}{\|x\|} - \frac{t}{۱ - t}\frac{\lambda}{\lambda x + y})x - \frac{t}{۱ - t}\frac{y}{\|\lambda x + y\|}\Big\|^{۲}\Big].\end{aligned}$$

از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi(\lambda, t) \longrightarrow (۱ - t)^{۲}[(۱ + \frac{t}{۱ - t})^{۲} - (۱ - \frac{t}{۱ - t})^{۲}] = ۴t(۱ - t) \quad (\lambda \to +\infty)$$

و

$$\varphi(\lambda, t) \longrightarrow (۱ - t)^{۲}[(۱ - \frac{۱}{۱ - t})^{۲} - (۱ + \frac{۱}{۱ - t})^{۲}] = -۴t(۱ - t) \quad (\lambda \to -\infty).$$

از سوی دیگر، به سادگی دیده می‌شود که به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ و هر $t \in (۰, ۱)$ داریم $|\varphi(\lambda, t)| \leq ۴t$. در

نتیجه

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\Phi(\lambda)=\int_{۰}^{۱}\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi(\lambda,t)dt=۴\int_{۰}^{۱}t(۱-t)dt=\frac{۲}{۳}>۰$$

و

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\Phi(\lambda)=\int_{۰}^{۱}\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi(\lambda,t)dt=-۴\int_{۰}^{۱}t(۱-t)dt=-\frac{۲}{۳}<۰.$$

بنابراین، بنابه قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته، نتیجه می‌گیریم که $\alpha\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $\Phi(\alpha)=۰$. این یعنی $\alpha\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x\perp_{UHH-I}(\alpha x+y)$. □

نکته ۳.۲. فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد، $x,y\in X$ و

$$\diamondsuit_۱,\diamondsuit_۲\in\{B,I,UI,HH-I,UHH-I\}.$$

در این‌صورت، منظور از نماد $\perp_{\diamondsuit_۱}\subseteq\perp_{\diamondsuit_۲}$، این است‌که اگر $x\perp_{\diamondsuit_۱}y$، آن‌گاه $x\perp_{\diamondsuit_۲}y$. همچنین گوییم روابط تعامد $\perp_{\diamondsuit_۱}$ و $\perp_{\diamondsuit_۲}$ در X مقایسه‌پذیر هستند، اگر $\perp_{\diamondsuit_۱}\subseteq\perp_{\diamondsuit_۲}$ یا $\perp_{\diamondsuit_۲}\subseteq\perp_{\diamondsuit_۱}$.

نکته ۴.۲. فضای نرمدار $X=\mathbb{R}^۳$ به همراه نرم $\|(x_۱,x_۲,x_۳)\|=\max\{|x_۱|,|x_۲|,|x_۳|\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x=(۱,۰,\frac{۱}{۲})$ و $y=(-\frac{۱}{۴},۰,\frac{۱}{۲})$. در این‌صورت به آسانی دیده می‌شود که

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|=\frac{۳}{۲}$$

از این‌رو $x\perp_{UI}y$. از سوی دیگر، با انجام محاسبات ساده‌ای که به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود، داریم

$$\int_{۰}^{۱}\left\|(۱-t)\frac{x}{\|x\|}-t\frac{y}{\|y\|}\right\|^{۲}dt=\int_{۰}^{\frac{۳}{۴}}(۱-\frac{t}{۲})^{۲}dt+\frac{۱}{۴}\int_{\frac{۳}{۴}}^{۱}(۳t-۱)^{۲}dt=\frac{۴۳}{۶۴}$$

و

$$\int_{0}^{1}\|(1-t)\frac{x}{\|x\|}+t\frac{y}{\|y\|}\|^{2}dt=\int_{0}^{\frac{1}{4}}(1-\frac{3t}{2})^{2}dt+\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}(1+t)^{2}dt+\int_{\frac{3}{4}}^{1}(\frac{3t}{2}-1)^{2}dt$$
$$=\frac{173}{192}.$$

این یعنی $x \not\perp_{UHH-I} y$ که نتیجه می‌دهد در فضای نرمدار X، $\perp_{UI} \nsubseteq \perp_{UHH-I}$.

اکنون ثابت می کنیم در فضای نرمدار X، $\perp_{UHH-I} \nsubseteq \perp_{UI}$. برای این منظور به برهان خلف، فرض کنیم در X داشته باشیم $\perp_{UHH-I} \subseteq \perp_{UI}$ و $x, y \in X$ چنان باشند که $x \perp_{UI} y$ و $x \not\perp_{UHH-I} y$. بنابه لم ۲.۲ عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y)$. از سوی دیگر، چون تعامد متساوی‌الساقین یکانی ویژگی یکتایی دارد (قضیهٔ ۲ از [۲۸] را ببینید) و $\perp_{UHH-I} \subseteq \perp_{UI}$، پس تعامد UHH–I نیز در X ویژگی یکتایی دارد و لذا α یکتاست و $x \perp_{UI} (\alpha x + y)$. بنابراین $\alpha = 0$ و در نتیجه $x \perp_{UHH-I} y$ که امکان‌پذیر نیست. به این‌ترتیب نتیجه می‌گیریم $\perp_{UI} \subseteq \perp_{UHH-I}$ که این نیز در این فضای نرمدار معتبر نیست.

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد، $0 \neq x \in X$ و $y \in X$. تابعک‌های

$$\tau_{-}(x,y)=\lim_{t\to 0^{-}}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}, \quad \tau_{+}(x,y)=\lim_{t\to 0^{+}}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

به‌ترتیب، مشتق گاتوی چپ و راست تابع نرم در نقطهٔ x و در جهت y نامیده می‌شوند. تابع نرم در نقطهٔ x، در جهت y گاتو–مشتق‌پذیر است اگر $\tau_{-}(x,y) = \tau_{+}(x,y)$ که این مقدار مشترک را با $\tau(x,y)$ نشان می‌دهیم و مشتق گاتوی تابع نرم در نقطهٔ x، در جهت y می‌نامیم. اگر تابع نرم در نقطهٔ x در جهت هر $y \in X$ گاتو–مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع نرم در نقطهٔ x گاتو–مشتق‌پذیر است. از جمله ویژگی‌های مهم تابعک‌های $\tau_{\pm}$ می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:

الف) $\tau_{-}(x,y) \leq \tau_{+}(x,y)$ و $|\tau_{\pm}(x,y)| \leq \|y\|$؛

ب) $\tau_{\pm}(x,\alpha y) = \begin{cases} \alpha\tau_{\pm}(x,y) & \alpha > 0 \\ \alpha\tau_{\mp}(x,y) & \alpha \leq 0 \end{cases}$؛

پ) $\tau_{\pm}(x,\alpha x + y) = \alpha\|x\| + \tau_{\pm}(x,y)$.

لم ۵.۲. *[۱۰، لم ۷.۲] فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. اگر اعداد حقیقی λ و μ وجود داشته باشند که $\lambda + \mu \neq 0$ و $\lambda\tau_{-}(x, y) + \mu\tau_{+}(x, y)$ تابعی پیوسته از $x, y \in X$ باشد، آن‌گاه تابع نرم روی X گاتو-مشتق‌پذیر است.*

لم ۶.۲. *[۲۰] فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد و $x, y \in X$. در این‌صورت، به‌شرط این‌که نرم X گاتو-مشتق پذیر باشد، داریم $x \perp_B y$ اگر و تنها اگر $\tau(x, y) = 0$.*

بر این نکته نیز باید تاکید کنیم که تعامد HH–I و تعامد برکوف-جیمز در فضاهای نرمداری که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی شود، معادل نیستند. در واقع، به آسانی دیده می‌شود که در فضاهای ضرب داخلی تعامد UHH–I و تعامد برکوف-جیمز معادل هستند. امّا اگر X یک فضای نرمدار با بعد حداقل ۳ باشد و تعامد UHH–I و تعامد برکوف جیمز در X معادل باشند، آن‌گاه تعامد برکوف-جمیز در X متقارن خواهد بود و لذا قضیهٔ ۱.۱ نتیجه می‌دهد که X یک فضای ضرب داخلی است. به‌علاوه، مثال زیر نشان می‌دهد که این تعامدها در فضاهای نرمدار ۲-بعدی که نرم آن‌ها از ضرب داخلی القا نمی‌شود، معادل نیستند.

مثال ۷.۲. فضای نرمدار $X = \mathbb{R}^2$ به همراه نرم $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x = (1, 0)$ و $y = (1, 1)$. در این‌صورت $x \perp_B y$. زیرا

$$\|x + \lambda y\| = |1 + \lambda| + |\lambda| \geq \|x\| = 1 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

در حالی‌که

$$\int_0^1 \left\|(1 - t)\frac{x}{\|x\|} - t\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 dt = \int_0^{\frac{2}{3}} (1 - t)^2 dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 (2t - 1)^2 dt = \frac{13}{27}$$

و

$$\int_0^1 \left\|(1 - t)\frac{x}{\|x\|} + t\frac{y}{\|y\|}\right\|^2 dt = 1.$$

بنابراین $x \not\perp_{UHH-I} y$. همچنین به‌ازای $z = (۲, ۱)$ و $w = (۱, -۲)$ داریم

$$\int_{۰}^{۱} \|(۱-t)\frac{z}{\|z\|} - t\frac{w}{\|w\|}\|^{۲} dt = \int_{۰}^{\frac{۲}{۳}} (۱ - \frac{۲t}{۳})^{۲} dt + \frac{۱}{۹}\int_{\frac{۲}{۳}}^{۱} (۴t-۱)^{۲} dt = \frac{۱۵۱}{۳۵}$$

و

$$\int_{۰}^{۱} \|(۱-t)\frac{z}{\|z\|} + t\frac{w}{\|w\|}\|^{۲} dt = \int_{۰}^{\frac{۱}{۳}} (۱ - \frac{۴t}{۳})^{۲} dt + \frac{۱}{۹}\int_{\frac{۱}{۳}}^{۱} (۱+۲t)^{۲} dt = \frac{۱۵۱}{۳۵}.$$

بنابراین $z \perp_{UHH-I} w$ امّا $z \not\perp_{B} w$. زیرا به‌ازای $\lambda = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\|z + \lambda w\| = |۲ + \lambda| + |۱ - ۲\lambda| = \frac{۵}{۲} < \|z\| = ۳.$$

همانطور که قبلاً اشاره شد، تعامد متساوی‌الساقین تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. شرایط ضعیف‌تری نسبت به همگنیِ تعامد متساوی‌الساقین نیز برای مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی به‌دست آمده است. امیر [۸] ثابت کرد فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر $\alpha \in (۰, ۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$x \perp_I y \Rightarrow x \perp_I \alpha y \quad (\forall x, y \in X). \tag{۳.۲}$$

این مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی در [۱۲] توسط نویسندگان بهبود یافته است. همچنین می‌دانیم تعامد HH−I تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. در [۱۶] نسخه‌ای از مشخصه‌سازی ارائه شده توسط امیر برای تعامد HH−I به‌دست آمده است (قضیهٔ ۱۵.۲ از [۱۶] را ببینید). آلونسو [۱۲] [۳] در رسالهٔ دکتری خودش مشخصه‌سازی ارائه شده توسط امیر را بهبود بخشید (گزارهٔ ۲۷.۲ از [۳] را ببینید). در واقع، او ثابت کرد که فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر $\delta > ۰$

[12] Alonso

وجود داشته باشد به‌طوری که

$$x \perp_I y,\ |\lambda| < \delta \Rightarrow x \perp_I \lambda y \quad (\forall x, y \in \mathbb{S}_X)$$

که در آن $\mathbb{S}_X := \{x \in X : \|x\| = ۱\}$ کرهٔ واحد X است.

در پایان این بخش قصد داریم نسخه‌ای از مشخصه‌سازی ارائه شده توسط آلونسو را برای تعامد HH–I در فضاهای نرمدار حداقل ۳-بعدی به‌دست آوریم. به بیان دقیق‌تر، به عنوان نتیجهٔ اصلی این بخش در قضیهٔ بعد بر اساس تعامد HH–I یک شرط لازم و کافی دیگر برای این‌که نرم یک فضای نرمدار با بعد حداقل ۳ از یک ضرب داخلی القا شود، به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که شرط لازم و کافی که در قضیهٔ بعد به‌دست می‌آید از همگنیِ تعامد HH–I ضعیف‌تر است.

قضیه ۸.۲. *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار با بعد حداقل ۳ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(۱) برای هر $x, y \in \mathbb{S}_X$، عدد $\delta = \delta(x, y) > ۰$ وجود دارد به‌طوری که

$$x \perp_{HH-I} y \Rightarrow x \perp_{HH-I} \lambda y \quad (\forall \lambda \in (۰, \delta)).$$

(۲) X فضای ضرب داخلی است.

اثبات. واضح است که اگر X فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه تعامد HH–I با تعامد حاصل از ضرب داخلی معادل است و بنابراین (۱) برقرار است.

برای اثبات (۱)⇐(۲)، فرض کنیم $x, y \in \mathbb{S}_X$ و $x \perp_{HH-I} y$. پس $\delta = \delta(x, y) > ۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\lambda \in (۰, \delta)$، $x \perp_{HH-I} \lambda y$. نگاشت $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\lambda) = \int_۰^۱ \left(\|(۱ - t)x + t\lambda y\|^۲ - \|(۱ - t)x - t\lambda y\|^۲ \right) dt \quad (\lambda \in (۰, \delta)).$$

در این‌صورت $F(\circ) = \circ$ و برای هر $\lambda \in (\circ, \delta)$، $F(\lambda) = \circ$. لذا

$$F'_+(\circ) = \lim_{\lambda \to \circ^+} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = \circ.$$

توجه می‌کنیم که

$$\frac{F(\lambda)}{\lambda} = \int_\circ^{۱} (F^+(\lambda, t) - F^-(\lambda, t))dt$$

که در آن

$$F^+(\lambda, t) = \frac{\|(۱ - t)x + t\lambda y\|^۲ - \|(۱ - t)x\|^۲}{\lambda}$$

و

$$F^-(\lambda, t) = \frac{\|(۱ - t)x - t\lambda y\|^۲ - \|(۱ - t)x\|^۲}{\lambda}.$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} F^+(\lambda, t) &= \frac{\|(۱ - t)x + \lambda t y\|^۲ - \|(۱ - t)x\|^۲}{\lambda} \\ &= \left(\frac{\|(۱ - t)x + \lambda t y\| - \|(۱ - t)x\|}{\lambda}\right)(\|(۱ - t)x + \lambda t y\| + \|(۱ - t)x\|). \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{\lambda \to \circ^+} F^+(\lambda, t) = ۲t(۱ - t)^۲\|x\|\tau_+(x, y) = ۲t(۱ - t)^۲\tau_+(x, y).$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} F^{-}(\lambda, t) &= \frac{\|(۱-t)x-\lambda ty\|^{۲}-\|(۱-t)x\|^{۲}}{\lambda} \\ &= (\frac{\|(۱-t)x-\lambda ty\|-\|(۱-t)x\|}{\lambda})(\|(۱-t)x-\lambda ty\|+\|(۱-t)x\|). \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{\lambda\to\circ^{+}} F^{-}(\lambda, t) = ۲t(۱-t)^{۲}\|x\|\tau_{+}(x, -y) = -۲t(۱-t)^{۲}\tau_{-}(x, y).$$

لذا از قضیهٔ همگرایی مغلوب لبگ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \circ = F'_{+}(\circ) = \lim_{\lambda\to\circ^{+}} \frac{F(\lambda)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to\circ^{+}} \int_{\circ}^{۱} (F^{+}(\lambda, t) - F^{-}(\lambda, t))dt \\ &= \int_{\circ}^{۱} \lim_{\lambda\to\circ^{+}} (F^{+}(\lambda, t) - F^{-}(\lambda, t))dt \\ &= (\tau_{-}(x, y) + \tau_{+}(x, y)) \int_{\circ}^{۱} ۲t(۱-t)^{۲}dt \\ &= \frac{۱}{۶}(\tau_{-}(x, y) + \tau_{+}(x, y)). \end{aligned}$$

بنابراین $\tau_{-}(x, y) + \tau_{+}(x, y) = \circ$.

فرض کنیم $x, y \in X$ دو بردار دلخواه و مستقل خطی باشند. اگر $\alpha = \alpha(x, y) \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $(\alpha x + y) \perp_{UHH-I} x$ (وجود α در لم ۲.۲ تضمین شده است)، آن‌گاه $\frac{\alpha x+y}{\|\alpha x+y\|} \perp_{HH-I} \frac{x}{\|x\|}$. پس بنابه

آن‌چه ثابت کردیم و با استفاده از ویژگی‌های تابعک‌های $\tau_\pm$ داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= \tau_+(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha x + y}{\|\alpha x + y\|}) + \tau_-(\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha x + y}{\|\alpha x + y\|}) \\ &= \frac{۱}{\|x\|\,\|\alpha x + y\|}((\alpha\|x\| + \tau_+(x, y)) + (\alpha\|x\| + \tau_-(x, y))) \\ &= \frac{۱}{\|x\|\,\|\alpha x + y\|}(۲\alpha\|x\| + \tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)). \end{aligned}$$

از این‌رو

$$\alpha = \alpha(x, y) = -\frac{\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)}{۲\|x\|}.$$

بنابراین برای هر دو بردار مستقل خطی $x, y \in X$، عدد حقیقی یکتای $\alpha = \alpha(x, y)$ وجود دارد به‌طوری که

$$x \perp_{UHH-I} (\alpha x + y) \Leftrightarrow \alpha = \alpha(x, y) = -\frac{\tau_-(x, y) + \tau_+(x, y)}{۲\|x\|}.$$

اکنون فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی مستقل خطی در X باشند و بردارهای $x, y \in X$ چنان باشند که $x_n \to x$ و $y_n \to y$. در این‌صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد $\alpha_n := \alpha(x_n, y_n)$ وجود دارد که $x_n \perp_{UHH-I} (\alpha_n x_n + y_n)$ و در نتیجه بنابه (؟؟) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\alpha_n = \alpha(x_n, y_n) = -\frac{\tau_-(x_n, y_n) + \tau_+(x_n, y_n)}{۲\|x_n\|}.$$

از آنجایی‌که $|\tau_\pm(x_n, y_n)| \leq \|y_n\|$، پس دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$ کُشی و لذا کراندار است و درنتیجه زیردنباله‌ای همگرا مانند $\{\alpha'_n\}$ دارد. فرض می‌کنیم $\alpha'_n \to \beta$. چون $\{\alpha_n\}$ کشی است و زیردنباله‌ای همگرا به β دارد، پس $\alpha_n \to \beta$. از طرفی، چون $x_n \perp_{UHH-I} (\alpha_n x_n + y_n)$ و $x_n \to x$، $y_n \to y$ و $\alpha_n \to \beta$، بنابه ویژگی پیوستگی تعامد UHH–I نتیجه می‌گیریم که $x \perp_{UHH-I} (\beta x + y)$ و لذا از (؟؟) نتیجه می‌شود

که $\beta = \alpha(x, y)$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta = \alpha(x, y).$$

این یعنی $\alpha(x, y)$ و در نتیجه $\tau_+(x, y) + \tau_-(x, y)$ نسبت به هر دو مولفهٔ x و y پیوسته است. بنابراین از لم ۵.۲ نتیجه می‌شود که تابع نرم روی X گاتو-مشتق‌پذیر است و لذا برای هر $x, y \in X$، $\tau(x, y) := \tau_-(x, y) = \tau_+(x, y)$. بدین ترتیب با استفاده از لم ۶.۲ نتیجه می‌گیریم که برای هر $x, y \in X$،

$$x \perp_{UHH-I} y \Leftrightarrow \tau(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp_B y.$$

امّا می‌دانیم تعامد HH-I و در نتیجه تعامد UHH-I متقارن است. بنابراین تعامد برکوف-جیمز نیز متقارن است و قضیهٔ ۱.۱ نتیجه می‌دهد که X فضای ضرب داخلی است. □

تشکر و قدردانی

از سردبیر، دبیر تخصصی و داور محترم که با نظرات ارزشمند خود بر غنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

مراجع

[۱] مهدی دهقانی، فضاهای ضرب داخلی: از اتحاد متوازی الاضلاع تا سه گانه جیمز، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی* **۳۹**(۲) (۱۳۹۹)، ۱۰۷-۲۳.

[۲] محمد صال مصلحیان، فاطمه عبدله زاده گنابادی، تعامد برکوف-جیمز در فضاهای برداری نرمدار، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی* **۳۶**(۶۰) (۱۳۹۶)، ۱۲۱-۱۳۰.

[3] J. Alonso, *Ortogonalidad en espacios normados*, PhD thesis, Universidad de Extremadura, (1984).

[4] J. Alonso and C. Beníitez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties, *Extracta Math.*, **3** (1988), 1–15.

[5] J. Alonso and C. Beníitez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. II. Relations between main orthogonalities, *Extracta Math.*, **4**(3) (1989), 121–131.

[6] J. Alonso, Some results on Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Arch. Math.*, **61**(2) (1993), 177–182.

[7] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, *Aequationes Math.*, **83**(1) (2012), 153–189.

[8] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 20. Birkhäuser, Basel, (1986).

[9] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1**(2) (1935), 169–172.

[10] S.O. Carlsson, Orthogonality in normed linear spaces, *Ark. Mat.*, **4** (1962), 297–318

[11] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.

[12] F. Dadipour, F. Sadeghi and A. Salemi, Characterizations of inner product spaces involving homogeneity of isosceles orthogonality, *Arch. Math. (Basel)*, **104**(5) (2015), 431–439.

[13] F. Dadipour and M.S. Moslehian, A characterization of inner product spaces related to the p-angular distance, *J. Math. Anal. Appl.*, **371**(2) (2010), 677–681.

[14] F. Dadipour, F. Sadeghi and A. Salemi, An orthogonality in normed linear spaces based on angular distance inequality *Aequationes Math.*, **90**(2) (2016), 281–297.

[15] M.M. Day, Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **62** (1947), 320–337.

[16] M. Dehghani and A. Zamani, Characterization of real inner product spaces by Hermite-Hadamard type orthogonalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **479** (2019), 1364–1382.

[17] S.S. Dragomir and E. Kikianty, Orthogonality connected with integral means and characterizations of inner product spaces, *J. Geom.*, **98**(1) (2010), 33–49.

[18] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 19. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 17. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[19] R.C. James, Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **12**(2) (1945), 291–302.

[20] R.C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**(2) (1947), 265–292.

[21] R.C. James, Inner product in normed linear spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **53** (1947), 559–566.

[22] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, **36**(2) (1935), 719–723 .

[23] E. Kikianty and S.S. Dragomir, Hermite-Hadamard's inequality and the p-HH-norm on the Cartesian product of two copies of a normed space, *Math. Inequal. Appl.*, **13**(1) (2010), 1–32.

[24] E. Kikianty and S.S. Dragomir, On Carlsson type orthogonality and characterization of inner product spaces, *Filomat*, **26**(4) (2012), 859–870.

[25] J. Rooin, S. Rajabi and M.S. Moslehian, p-angular distance orthogonality, *Aequat. Math.*, **94** (2020), 103–121.

[26] I. Singer, Angles abstraits et fonctions trigonométriques dans les espaces de Banach, (Romanian) *Acad. R. P. Romîne. Bul. Şti. Secţ. Şti. Mat. Fiz.*, **9** (1957), 29–42

[27] A. Zamani and M. Dehghani, *On Exact and Approximate Orthogonalities Based on Norm Derivatives*, In: Brzdęk J., Popa D., Rassias T. (eds) Ulam Type Stability, Springer, Cham., 2019.

[28] L. Zheng and Z. Ya Dong, Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Arch. Math. (Basel)*, **55**(6) (1990), 588–594.