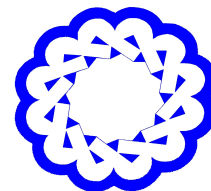


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم با به‌کارگیری موجک‌های CAS

معصومه مهموم سالکویه‌آ، مهدی سبزواری*آ

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این مقاله با به‌کار بردن موجک‌های CAS به عنوان توابع پایه‌ای و با استفاده از روش گالرکین، به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی خطی نوع دوم می‌پردازیم. سپس اهداف روش توسط چند مثال عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با روش حاصل از به‌کار بردن موجک‌های لژاندر و چبیشف نشان می‌دهد که روش حاضر، به‌ویژه در معادلاتی که توابع ظاهر شده در آنها متناوب هستند، به نتایج بسیار بهتری منتج می‌شود. لذا استفاده از موجک‌های CAS در چنین معادلاتی توصیه می‌شود.
موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۱) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۲۵ بهمن ۱۳۹۸

پذیرفته شده: ۲۸ مهر ۱۳۹۹

دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت
۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:

معادلات انتگرال فردهلم

فازی نوع دوم،

موجک‌های CAS، روش

گالرکین.

۱. مقدمه

معادلات انتگرال شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که به عنوان مدل ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی ظاهر می‌شود. بسیاری از مسائل در ریاضی، فیزیک و مهندسی خصوصاً در زمینه‌های مکانیک کوانتوم، ژئوفیزیک، الکتریسیته و مغناطیس، نظریه جنبشی گازها و غیره به حل انواع مختلفی از معادلات انتگرال منتهی می‌شوند. از آنجا که حل تحلیلی معادلات انتگرال در بسیاری از موارد دشوار و یا غیرممکن است، لذا روشهای عددی در حل آنها پیشنهاد می‌گردد. در سال‌های اخیر انواع روش‌های عددی برای حل انواع معادلات انتگرال ارائه شده است که به عنوان نمونه می‌توان از مراجع [۱۶]، [۲۰]، [۲۱] و غیره نام برد.

معادلات انتگرال فازی حالت خاصی از معادلات انتگرال هستند که در مطالعه و حل دسته بزرگی از مسائل مرتبط با ریاضیات کاربردی و کنترل فازی سهم مهم و به‌سزایی ایفا می‌کنند. همچنین سیستم‌های فازی که اخیراً معرفی شده‌اند، در پژوهش‌های گوناگونی از مسائل مسافت‌یابی فضای متریکی فازی [۱۸]، فضای توپولوژیک فازی [۵]، معادلات دیفرانسیل فازی [۲، ۳، ۴] و فیزیک ذرات [۹، ۱۰، ۱۱، ۲۴] مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مفهوم اعداد فازی و عملیات محاسباتی بر روی این اعداد ابتدا توسط لطفی‌زاده و همکاران وی معرفی و مورد بررسی قرار گرفت [۶]. سپس دابویس و پرید، مفهوم انتگرال‌گیری از توابع فازی را معرفی کردند [۸]. پس از آنها کانگژین و مینگ با استفاده از مفهوم انتگرال فازی، برای نخستین بار معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم را معرفی و مورد بررسی قرار دادند [۷].

در سال‌های اخیر توابع پایه‌ای مختلفی در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم به کار رفته‌اند، که از آن جمله می‌توان به موجک چیشیف نوع دوم [۱]، توابع بلاک پالس آمیخته با چندجمله‌ای‌های تیلور [۲۲]، موجک لژاندر [۲۳]، توابع بلاک پالس [۱۳] و غیره اشاره کرد.

در این مقاله با به‌کارگیری موجک‌های CAS، حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی خطی نوع دوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا تعاریف مقدماتی مرتبط با اعداد فازی و عملیات محاسباتی بر روی آنها را بیان و سپس فرم پارامتری معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم که در واقع

دستگاهی از معادلات انتگرال فردهلم خطی در حالت غیر فازی است را معرفی می‌نماییم. سپس با به‌کارگیری موجک‌های CAS و با استفاده از روش گالرکین، معادله انتگرال فازی نوع دوم را به دستگاهی از معادلات جبری خطی تبدیل کرده و پس از حل این دستگاه، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی به دست می‌آوریم. در انتها با بیان چند مثال عددی و مقایسه نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله با روش حاصل از به‌کار بردن موجک‌های چپیشف [۱] و لژاندر [۲۳]، دقت روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرچند بسیاری از پژوهشگران، استفاده از موجک‌های لژاندر و چپیشف را در حل عددی انواع مختلفی از معادلات انتگرال توصیه می‌کنند، اما همانگونه که از مقایسه نتایج قابل مشاهده است، استفاده از موجک‌های CAS به‌ویژه در معادلاتی که توابع ظاهر شده در آنها متناوب هستند، به نتایج بسیار بهتری منتج می‌شود.

۲. تعاریف مقدماتی

در این بخش، تعاریف و قضایای مقدماتی مرتبط با اعداد و معادلات فازی که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ [۱۷] یک عدد فازی تابعی است مانند $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. u از بالا نیمه پیوسته است.

۲. خارج از بازه‌ای مانند $[c, d] \subset \mathbb{R}$ داریم $u(x) = 0$.

۳. اعداد حقیقی a و b وجود دارند، به طوری که $c \leq a \leq b \leq d$ و به ازای آنها:

(آ) روی بازه $[c, a]$ صعودی یکنواخت است.

(ب) روی بازه $[b, d]$ نزولی یکنواخت است.

(ج) برای هر $a \leq x \leq b$ داریم $u(x) = 1$.

تعریف ۲.۲.۱ [۱۲] یک عدد فازی در فرم پارامتری به وسیله یک زوج مرتب از توابع $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ که $0 \leq r \leq 1$ نمایش داده می‌شود، که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\underline{u}(r)$ یک تابع کران‌دار از چپ پیوسته و غیر نزولی در بازه $[0, 1]$ می‌باشد.

مهموم سالکویه، سبزواری/ موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱-۱۶

۲. $\bar{u}(r)$ یک تابع کران‌دار از چپ پیوسته و غیر صعودی در بازه $[0, 1]$ می‌باشد.

۳. برای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$.

تعریف ۳.۲. برای دو عدد فازی دلخواه $u = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ و $v = (\underline{v}(r), \bar{v}(r))$ و برای هر $k \in \mathbb{R}$ ، جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$1. (\underline{u+v})(r) = (\underline{u}(r) + \underline{v}(r))$$

$$2. (\overline{u+v})(r) = (\bar{u}(r) + \bar{v}(r))$$

$$3. (\underline{ku})(r) = k\underline{u}(r)$$

$$4. (\overline{ku})(r) = k\bar{u}(r)$$

تعریف ۴.۲. [۱۴] برای هر دو عدد فازی دلخواه $u = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ و $v = (\underline{v}(r), \bar{v}(r))$ ، فاصله بین دو عدد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \max \{ |\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)| \}. \quad (1.2)$$

اگر مجموعه اعداد فازی را با E' نشان دهیم، آنگاه (E', D) یک فضای متریک کامل است [۱۹].

تعریف ۵.۲. [۱۲] تابع $f : [a, b] \rightarrow E'$ را در نظر بگیرید. برای هر افراز $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ از $[a, b]$ و برای هر مقدار دلخواه $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ که $1 \leq i \leq n$ ، فرض کنید:

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

$$\Delta := \max\{|t_i - t_{i-1}|, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

انتگرال معین از تابع $f(t)$ روی بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_P \quad (2.2)$$

قضیه ۶.۲. [۱۴] اگر تابع فازی $f(t)$ در فضای متریک D پیوسته باشد، انتگرال معین تعریف شده در (۲.۲) وجود دارد و به صورت زیر است:

$$\frac{\int_a^b f(t, r) dt}{\int_a^b \underline{f}(t, r) dt} = \frac{\int_a^b \underline{f}(t, r) dt}{\int_a^b \bar{f}(t, r) dt},$$

۳. معادله انتگرال فازی فردهلم نوع دوم

معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم، در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) u(s) ds. \quad (۱.۳)$$

در معادله بالا $f(t) \in L^1[a, b]$ و $k(t, s) \in L^1([a, b] \times [a, b])$ توابعی معلوم و $u(t)$ تابعی مجهول است. در این بخش با توجه به تعریف ۲.۲، فرم پارامتری معادله انتگرال فردهلم فازی نوع دوم را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $(\underline{u}(t, r), \bar{u}(t, r))$ و $(\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r))$ شکل پارامتری از توابع $u(t)$ و $f(t)$ باشند که $0 \leq r \leq 1$ و $t \in [a, b]$. شکل پارامتری معادله انتگرال فردهلم فازی نوع دوم به صورت زیر است: [۱۲]:

$$\begin{cases} \underline{u}(t, r) = \underline{f}(t, r) + \lambda \int_a^b \varphi(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) ds, \\ \bar{u}(t, r) = \bar{f}(t, r) + \lambda \int_a^b \bar{\varphi}(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) ds. \end{cases} \quad (۲.۳)$$

که برای هر $0 \leq r \leq 1$ و $t \in [a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) &= \begin{cases} k(t, s)\underline{u}(s, r) & k(t, s) \geq 0, \\ k(t, s)\bar{u}(s, r) & k(t, s) < 0, \end{cases} \\ \bar{\varphi}(t, s, \underline{u}(s, r), \bar{u}(s, r)) &= \begin{cases} k(t, s)\bar{u}(s, r) & k(t, s) \geq 0, \\ k(t, s)\underline{u}(s, r) & k(t, s) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

شرایط لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب معادله انتگرال فازی در مرجع [۲۵] بیان شده است. در این مقاله فرض می‌کنیم $\lambda = 1$ ، $a = 0$ و $b = 1$ می‌باشد. همچنین فرض کنید

$$k^+(t, s) = \max_{0 \leq t, s \leq 1} \{k(t, s), 0\},$$

$$k^-(t, s) = \min_{0 \leq t, s \leq 1} \{k(t, s), 0\}.$$

در این صورت معادله انتگرال فازی (۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t, r) &= \underline{f}(t, r) + \int_0^1 k^+(t, s)\underline{u}(s, r)ds + \int_0^1 k^-(t, s)\bar{u}(s, r)ds, \\ \bar{u}(t, r) &= \bar{f}(t, r) + \int_0^1 k^+(t, s)\bar{u}(s, r)ds + \int_0^1 k^-(t, s)\underline{u}(s, r)ds. \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

برای هر $0 \leq t, r \leq 1$ معادله (۳.۳) یک دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی در حالت غیر فازی است.

۴. موجک‌های CAS

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع هستند که از اتساع و انتقال تابعی به نام موجک مادر ψ تولید می‌شوند. زمانی که پارامتر اتساع a و پارامتر انتقال b به طور پیوسته تغییر می‌کنند، خانواده‌ای از موجک‌های

پیوسته به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{\nu}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (1.4)$$

اگر پارامترهای a و b را به صورت زیر به مقادیر گسسته محدود کنیم:

$$a = a_0^{-k}, \quad b = nb_0 a_0^{-k}, \quad a_0 > 1, \quad b_0 > 0,$$

که n و k اعداد صحیح مثبت هستند؛ آنگاه خانواده‌ای از موجک‌های گسسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{-\frac{k}{\nu}} \psi(a_0^k t - nb_0).$$

که $\{\psi_{k,n}(t)\}$ یک پایه موجکی برای $L^2(\mathbb{R})$ است. در حالت خاص، اگر $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ اختیار شوند، آنگاه $\{\psi_{k,n}(t)\}$ پایه‌ای متعامد یک‌ه خواهد بود [۱۵].

موجک‌های CAS بر روی بازه $[0, 1)$ به صورت $\psi_{nm}(t) = \psi(k, n, m, t)$ نمایش داده می‌شوند، که در آن k عددی صحیح و نامنفی، $2^k, 2, \dots, 1$ و n عددی صحیح است. این موجک‌ها بر روی بازه $[0, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{\nu}} \text{CAS}_m(2^k t - n + 1) & \frac{n-1}{2^k} \leq t < \frac{n}{2^k} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2.4)$$

که در آن

$$\text{CAS}_m(t) = \cos(2m\pi t) + \sin(2m\pi t). \quad (3.4)$$

در اینجا پارامتر اتساع برابر با $a = 2^{-k}$ و پارامتر انتقال برابر با $b = n2^{-k}$ می‌باشند. مجموعه

موجک‌های CAS یک پایه متعامد یکه در فضای $L^2[0, 1)$ می‌باشد.

۵. تقریب توابع

خانواده $\{\psi_{nm}(t)\}$ یک پایه متعامد یکه در فضای $L^2[0, 1)$ است. بنابراین هر تابع دلخواه $f \in L^2[0, 1)$ را می‌توان توسط موجک‌های CAS به صورت زیر بسط داد:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{nm} \psi_{nm}(t). \quad (1.5)$$

در رابطه بالا $c_{nm} = \langle f(t), \psi_{nm}(t) \rangle$ است و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ بیانگر ضرب داخلی در فضای $L^2[0, 1)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f(t), \psi_{nm}(t) \rangle = \int_0^1 f(t) \psi_{nm}(t) dt. \quad (2.5)$$

اگر سری (۱.۵) را از جایی به بعد قطع کنیم، تقریبی از تابع $f(t)$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\psi^k} \sum_{m=-M}^M c_{nm} \psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t). \quad (3.5)$$

در رابطه بالا C و $\Psi(t)$ بردارهایی از مرتبه $1 \times (\psi^k(\psi M + 1))$ هستند و عبارت‌اند از:

$$C = [c_{1(-M)}, c_{1(-M+1)}, \dots, c_{1(M)}, c_{2(-M)}, \dots, c_{2(M)}, \dots, c_{\psi^k(-M)}, \dots, c_{\psi^k(M)}]^T, \quad (4.5)$$

$$\Psi(t) = [\psi_{1(-M)}(t), \psi_{1(-M+1)}(t), \dots, \psi_{1(M)}(t), \psi_{2(-M)}(t), \dots, \psi_{2(M)}(t), \dots, \psi_{\psi^k(-M)}(t), \dots, \psi_{\psi^k(M)}(t)]^T. \quad (5.5)$$

به طریق مشابه می‌توان $k(t, s) \in L^2([0, 1) \times [0, 1))$ را توسط موجک‌های CAS به صورت زیر تقریب زد:

$$k(t, s) \simeq \Psi^T(t)K\Psi(s), \quad (۶.۵)$$

که در بالا K ماتریس مربعی از مرتبه $2^k(2M+1) \times 2^k(2M+1)$ است و درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_{ij} = \langle \Psi_i(t), \langle k(t, s), \Psi_j(s) \rangle \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \Psi_i(t)k(t, s)\Psi_j(s)dsdt. \quad (۷.۵)$$

در رابطه بالا $\Psi_i(t)$ و $\Psi_j(s)$ به ترتیب نشان دهنده درایه‌های i -ام و j -ام از بردارهای $\Psi(t)$ و $\Psi(s)$ تعریف شده در رابطه (۵.۵) هستند.

۶. حل عددی معادلات انتگرال فازی

معادله انتگرال فازی (۳.۳) را در نظر می‌گیریم که در آن توابع $\bar{f}(t, r)$ ، $\underline{f}(t, r)$ ، $\bar{k}^+(t, s)$ و $k^+(t, s)$ توابعی معلوم در فضای $L^2([0, 1) \times [0, 1))$ و $\underline{u}(t, r)$ و $\bar{u}(t, r)$ توابعی مجهول هستند. با توجه به تقریب توابع دو متغیره از رابطه (۶.۵)، با به‌کارگیری موجک‌های CAS تقریبی از این توابع را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$k^+(t, s) \simeq \Psi^T(t)K^+\Psi(s), \quad K^-(t, s) \simeq \Psi^T(t)K^-\Psi(s) \quad (۱.۶)$$

$$\underline{u}(t, r) \simeq \Psi^T(t)\underline{U}\Psi(r), \quad \bar{u}(t, r) \simeq \Psi^T(t)\bar{U}\Psi(r) \quad (۲.۶)$$

$$\underline{f}(t, r) \simeq \Psi^T(t)\underline{F}\Psi(r), \quad \bar{f}(t, r) \simeq \Psi^T(t)\bar{F}\Psi(r) \quad (۳.۶)$$

در معادلات بالا \bar{F} و \underline{F} ، K^- ، K^+ ، \bar{U} و \underline{U} ماتریس‌هایی از همین مرتبه با درایه‌های مجهول هستند. با جایگذاری روابط

۱۰ مهموم سالکویه، سبزواری/ موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱-۱۶
 (۱.۶)، (۲.۶) و (۳.۶) در رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \Psi^T(t)\underline{U}\Psi(r) &= \Psi^T(t)\underline{F}\Psi(r) + \int_0^1 \Psi^T(t)K^+\Psi(s)\Psi^T(s)\underline{U}\Psi(r)ds \\ &+ \int_0^1 \Psi^T(t)K^-\Psi(s)\Psi^T(s)\overline{U}\Psi(r)ds, \end{aligned} \quad (۴.۶)$$

$$\begin{aligned} \Psi^T(t)\overline{U}\Psi(r) &= \Psi^T(t)\overline{F}\Psi(r) + \int_0^1 \Psi^T(t)K^+\Psi(s)\Psi^T(s)\overline{U}\Psi(r)ds \\ &+ \int_0^1 \Psi^T(t)K^-\Psi(s)\Psi^T(s)\underline{U}\Psi(r)ds. \end{aligned} \quad (۵.۶)$$

حال با توجه به رابطه $\int_0^1 \Psi(s)\Psi^T(s)ds = I$ و پس از ساده کردن معادلات بالا، درنهایت به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\underline{U} = \underline{F} + K^+\underline{U} + K^-\overline{U}, \quad (۶.۶)$$

$$\overline{U} = \overline{F} + K^+\overline{U} + K^-\underline{U}. \quad (۷.۶)$$

دستگاه بالا یک دستگاه معادلات خطی با M^{2k-1} معادله و همین تعداد مجهول است. پس از حل این دستگاه و محاسبه درایه‌های ماتریس‌های مجهول \underline{U} و \overline{U} ، می‌توان با استفاده از معادله (۲.۶) تقریبی از توابع $\underline{u}(t, r)$ و $\overline{u}(t, r)$ را که در واقع جواب معادله انتگرال فازی هستند، به دست آورد.

۷. نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی دقت روش ارائه شده در این مقاله، دو مثال عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در هر مثال، نتایج حاصل از روش حاضر با روش‌های حاصل از به‌کارگیری موجک‌های چبیشف [۱] و لژاندر [۲۳] مقایسه شده‌اند.

مثال ۱۰۷. معادله انتگرال فردهلم فازی (۳.۳) با توابع

$$\begin{aligned} \underline{f}(t, r) &= \cos(2\pi t) \sin(2\pi r) - \frac{1}{4}t \cos^2(\pi r) + \frac{1}{4}t \\ \bar{f}(t, r) &= \sin(2\pi t) \cos(2\pi r) - \frac{1}{4}t \cos^2(\pi r) + \frac{1}{4}t \end{aligned}$$

و هسته $k(t, s) = t \sin(2\pi s)$ را در نظر می‌گیریم. با به‌کارگیری روش ارائه شده در این مقاله به ازای $k = 0$ و $M = 1$ ، ماتریس‌های K^+ ، K^- ، \underline{F} و \bar{F} به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\pi} & \frac{1}{2\pi^2} & \frac{1}{8\pi} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2\pi} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8\pi} & -\frac{1}{2\pi^2} & -\frac{1}{8\pi} \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad K^- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8\pi} & -\frac{1}{2\pi^2} & \frac{1}{8\pi} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8\pi} & \frac{1}{2\pi^2} & -\frac{1}{8\pi} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} -\frac{4\pi+1}{16\pi} & \circ & \frac{-1+4\pi}{16\pi} \\ -\frac{1}{16} & \circ & -\frac{1}{16} \\ -\frac{-1+4\pi}{16\pi} & \circ & \frac{4\pi+1}{16\pi} \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} -\frac{4\pi+1}{16\pi} & \circ & -\frac{4\pi+1}{16\pi} \\ -\frac{1}{16} & \circ & -\frac{1}{16} \\ \frac{4\pi+1}{16\pi} & \circ & \frac{4\pi+1}{16\pi} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

و با قرار دادن ماتریس‌های بالا در معادلات (۶.۶) و (۷.۶) و حل دستگاه معادلات خطی مربوطه،

ماتریس‌های \underline{U} و \overline{U} مطابق زیر بدست می‌آیند:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \overline{U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

درنهایت با قرار دادن ماتریس‌های بالا در رابطه‌های

$$\underline{u}(t, r) \simeq \Psi^T(t) \underline{U} \Psi(r), \quad (1.7)$$

$$\overline{u}(t, r) \simeq \Psi^T(t) \overline{U} \Psi(r), \quad (2.7)$$

جواب‌های $\underline{u}(t, r) = \cos(2\pi t) \sin(2\pi r)$ و $\overline{u}(t, r) = \sin(2\pi t) \cos(2\pi r)$ به ازای $0 \leq t, r \leq 1$ حاصل می‌شود که همان جواب‌های دقیق معادله هستند.

از طرف دیگر، معادله انتگرال فردهلم فازی ظاهر شده در مثال ۱.۷ را با استفاده از روش‌های ارائه شده در [۱] و [۲۳]، به‌ترتیب با به‌کارگیری موجک‌های چبیشف نوع دوم و موجک‌های لژاندر حل کرده‌ایم. در جدول ۱، مقایسه‌ای میان نتایج به‌دست آمده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۱] و [۲۳] و با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲) انجام شده است. همان‌گونه که از مقادیر این جدول قابل مشاهده است، در روش حاضر به ازای هزینه محاسباتی کمتر، یعنی مقادیر k و M کوچکتر، به جواب دقیق رسیده‌ایم، در حالی که این اتفاق در روش ارائه شده در [۱] و [۲۳] رخ نداده است. به عبارت دیگر، روش حاصل از به‌کارگیری موجک‌های چبیشف و لژاندر در این مثال، با افزایش مقادیر k و M به جواب واقعی همگرا می‌شوند، اما هیچ‌گاه خطای مطلق برابر با صفر نخواهد بود.

مثال ۲.۷. معادله انتگرال فردهلم فازی (۳.۳) با توابع

$$\underline{f}(t, r) = \sin(4\pi t) \cos(4\pi r) - \sin(\pi t) \sin(\pi r) \cos(\pi r) \cos(2\pi r)$$

$$\overline{f}(t, r) = \sin(4\pi r) \cos(4\pi t) - \sin(\pi t) \sin(\pi r) \cos(\pi r) \cos(2\pi r)$$

و هسته $k(t, s) = \sin(\pi t) \cos(4\pi r)$ را در نظر می‌گیریم. با به‌کارگیری روش ارائه شده در این مقاله به

جدول ۱: خطای حاصل از مثال ۱۰۷ بر اساس فاصله تعریف شده در رابطه (۱۰۲)

t	روش حاضر به ازای $k = 0$ و $M = 1$	روش موجک چیشیف [۱] به ازای $k = 2$ و $M = 3$	روش موجک لژاندر [۲۳] به ازای $k = 3$ و $M = 4$
۰	۰	$2,5315 \times 10^{-1}$	$2,9310 \times 10^{-3}$
۰/۱	۰	$5,7125 \times 10^{-2}$	$1,2318 \times 10^{-3}$
۰/۲	۰	$7,9221 \times 10^{-2}$	$1,3038 \times 10^{-3}$
۰/۳	۰	$7,9221 \times 10^{-2}$	$1,3038 \times 10^{-3}$
۰/۴	۰	$5,7125 \times 10^{-2}$	$1,2319 \times 10^{-3}$
۰/۵	۰	$2,5315 \times 10^{-1}$	$2,9311 \times 10^{-3}$
۰/۶	۰	$5,7125 \times 10^{-2}$	$1,2319 \times 10^{-3}$
۰/۷	۰	$7,9221 \times 10^{-2}$	$1,3038 \times 10^{-3}$
۰/۸	۰	$7,9221 \times 10^{-2}$	$1,3039 \times 10^{-3}$
۰/۹	۰	$5,7125 \times 10^{-2}$	$1,2316 \times 10^{-3}$

ازای $k = 1$ و $M = 1$ ، جواب‌های $\underline{u}(t, r) = \sin(4\pi t) \cos(4\pi r)$ و $\bar{u}(t, r) = \cos(4\pi t) \sin(4\pi r)$ حاصل می‌شوند که همان جواب‌های واقعی معادله هستند. (در این مثال ماتریس‌های K^+ ، K^- ، F و \bar{F} همگی از مرتبه 6×6 هستند که به علت بزرگی، قادر به ارائه آنها در این مقاله نیستیم).

معادله انتگرال فردهلم فازی ظاهر شده در مثال ۲۰۷ را نیز با استفاده از روش‌های ارائه شده در [۱] و [۲۳] حل کرده‌ایم. در جدول ۲، مقایسه‌ای میان نتایج به دست آمده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۱] و [۲۳] و با توجه به فاصله تعریف شده در رابطه (۱۰۲) انجام شده است. همان‌گونه که از مقادیر این جدول قابل مشاهده است، در این مثال نیز روش حاضر به ازای هزینه محاسباتی کمتر به جواب دقیق انجامیده، در حالی که این اتفاق در روش ارائه شده در [۱] و [۲۳] رخ نداده است. به علاوه، از آنجا که توابع ظاهر شده در این مثال دارای تغییرات زیادی در بازه $0 \leq t, s, r \leq 1$ هستند، لذا موجک‌های چیشیف و لژاندر علی‌رغم هزینه محاسباتی بالا، به دقت چندان مطلوبی منجر نمی‌شوند. این اتفاق، مزیت موجک‌های CAS را در چنین معادلاتی نشان می‌دهد.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی خطی نوع دوم با به‌کارگیری موجک‌های CAS مورد بررسی قرار گرفت. معادلات مربوطه معرفی و سپس نحوه به‌کارگیری موجک‌های CAS در آنها تشریح شد. سپس با ارائه دو مثال عددی، دقت روش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از

جدول ۲: خطای حاصل از مثال ۲.۷ بر اساس فاصله تعریف شده در رابطه (۱.۲)

t	روش حاضر به ازای $k = 0$ و $M = 1$	روش موجک چبیشف [۱] به ازای $k = 2$ و $M = 3$	روش موجک لژاندر [۲۳] به ازای $k = 2$ و $M = 4$
۰	۰	1.8919×10^0	5.6026×10^{-1}
۰/۱	۰	3.4433×10^{-1}	2.5235×10^{-1}
۰/۲	۰	4.2931×10^{-1}	1.9496×10^{-1}
۰/۳	۰	4.3410×10^{-1}	2.0689×10^{-1}
۰/۴	۰	3.4442×10^{-1}	2.8857×10^{-1}
۰/۵	۰	1.8919×10^0	5.8040×10^{-1}
۰/۶	۰	3.4442×10^{-1}	2.8857×10^{-1}
۰/۷	۰	4.3410×10^{-1}	2.0689×10^{-1}
۰/۸	۰	4.2931×10^{-1}	1.9496×10^{-1}
۰/۹	۰	3.4433×10^{-1}	2.5235×10^{-1}

این دو مثال عددی به همراه مقایسه آنها با روش حاصل از به‌کار بردن موجک‌های لژاندر و چبیشف، به خوبی نشان داد که روش حاضر، به‌ویژه در معادلاتی که توابع ظاهر شده در آنها متناوب هستند، به نتایج بسیار بهتری منتج می‌شود. بنابراین به عنوان مهمترین نتیجه این مقاله، استفاده از موجک‌های CAS در معادلات با توابع متناوب توصیه می‌شود.

مراجع

[۱] م. سبزواری، ع. سعادت‌مندی، به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی فازی نوع دوم، مجله جبرخطی و موجک، ۶(۱) (۱۳۹۸)، ۱-۱۸.

- [2] S. Abbasbandy and T. Allah Viranloo, Numerical solution of fuzzy differential equation by Runge–Kutta method, *Nonlinear Stud.*, **11**(11) (2004), 7–29.
- [3] S. Abbasbandy, T. Allah Viranloo, Lopez-Pouso Oscar and JJ. Nieto, Numerical methods for fuzzy differential inclusions, *Comput. Math. Appl.*, **48** (2004), 1633–1641.
- [4] S. Abbasbandy and JJ. Nio, M. Alavi, Tuning of reachable set in one dimensional fuzzy differential in Clusions, *chaos Solitions & Fractals*, **26** (2005), 1337–1341.
- [5] M. Caldas and S. Jafari, θ -Compact fuzzy topological spaces, *Chaos Solitons & Fractals*, **25** (2005), 229–232.
- [6] SL. Chang and L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, *IEEE Trans Syst Man Cybernet*, **2** (1972), 30–34.

- [7] W. Congxin and M. Ming, On embedding problem of fuzzy number spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, **44** (1991), 33–38.
- [8] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, **8** (1982), 1–7.
- [9] M.S. Elnaschie, A review of E-infinity theory and the mass spectrum of high energy particale physics, *chaos Solitions & Fractals*, **19** (2004), 36–209.
- [10] M.S. Elnaschie, On fuzzy Kahler manifold which is consistent with the two slit experiment, *Int J Nonlinear Sci. Numer. Simu.*, **16** (2005), 8–95.
- [11] M.S. Elnaschie, The concepts of E infinity: an elementary introduction to the Cantorian-fractal theory of quantum physics, *chaos Solitions & Fractals*, **22** (2004), 495–511.
- [12] M. Friedman, M. Ma and A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations, *Fuzzy Sets and Systems*, **106** (1999), 35–48.
- [13] M. Ghanbari, R. Touthmalni and E. Kamrani, Numerical Solution of Linear Fredholm Fuzzy Integral Equation of the Second Kind by Block-pulse Functions, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **3** (2009), 2637–2642.
- [14] R. Goetschel and W. Vaxman, Elementary calculus, *Fuzzy Sets Syst.*, **18** (1986), 31–43.
- [15] J.S. Gu and W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.*, **27** (1996), 623–628.
- [16] S.M. Hashemiparast, M. Sabzevari and H. Fallahgoul, Improving the Solution of Nonlinear Volterra Integral Equations Using Rationalized Haar s-Functions, *Vietnam Journal of Mathematics* **39**(2) (2011), 145–157.
- [17] G.J. Klir, U.S. Clair and B. Yuan, *Fuzzy set Theory: Functions and Applications*, Prentice-Hall Inc, (1997).
- [18] J.H. Park, Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos Solitons & Fractals*, **22** (2004), 1039–1046.
- [19] M.L. Puri and D. Ralescu, Fuzzy random variables, *Math. Anal. Appl.*, **114** (1986), 22–409.
- [20] M. Sabzevari and F. Molaie, Numerical solution of system of nonlinear integro-differential equations using hybrid of Legendre polynomials and block-pulse functions, *Math. Interdisc. Res.*, Accepted.
- [21] M. Sabzevari, Erratum to “Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and Block-Pulse functions” [Appl. Math. Comput. 149 (2004) 799-806], *Appl.*

- Math. Comput.*, **339** (2018), 302–307.
- [22] M. Sabzevari, Corrigenda to “Numerical solution of Fredholm fuzzy integral equations of the second kind using...” [Ain Shams Eng. J. 5 (2014) 631–636], *Ain Shams Eng. J.*, **12** (2021), 2395–2399.
- [23] H. Sadeghi Goghary and M. Sadeghi Goghary, Two computational methods for solving linear Fredholm fuzzy integral equation of the second kind, *Applied Mathematics and Computation*, **182** (2006), 791–796.
- [24] Y. Tanaka, Y. Mizuno and T. Kado, Chaotic dynamics in the Friedman equation, *chaos Solutions & Fractals*, **24** (2005), 22–407.
- [25] HC. Wu, On the integrals, series and integral equations of fuzzy set valued functions, *J. Harbin Inst. Tech.*, **21** (1990), 11–19.