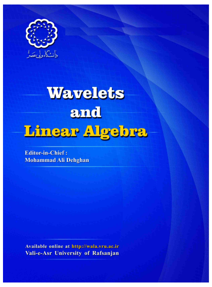
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۹۲-۱۷۷



موجک‌ها و جبرخطی
http://wala.vru.ac.ir
دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

نامساوی حالت برداری هولدر-مک‌کارتی و برخی نتایج آن

محسن کیان*[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد، استان خراسان شمالی، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۷ تیر ۱۴۰۱
پذیرفته شده: ۲۷ آذر ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی تقوی

کلمات کلیدی:

نامساوی حالت برداری، ماتریس مثبت، تابع فوق درجه دوم، نامساوی مثلث.

چکیده

در این مقاله به بررسی نامساوی حالت برداری هولدر-مک‌کارتی می‌پردازیم و با استفاده از بهبود این نامساوی، سعی می‌کنیم برخی نامساوی‌های شناخته شده‌ی حالت برداری را بهبود بخشیم. به‌ویژه، تخمین دقیق از نامساوی مثلث برای p-نرم‌ها روی بردارها برای $(\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n)$ را به صورت

$$\left(\frac{\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}\right)^p \begin{cases} \leq 1-\alpha(p)\,\|\mathrm{w}\|_p^p & p \geq 2; \\ \geq 1-\alpha(p)\,\|\mathrm{w}\|_p^p & 1 \leq p \leq 2; \\ = 1-\alpha(2)\,\|\mathrm{w}\|_2^2 & p = 2, \end{cases}$$

بیان می‌کنیم که در آن $\alpha(p)$ ضریبی بر حسب دو بردار است.

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

مطالعه توابع محدب، که علاوه بر آنالیز ریاضی نقش آنها در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی و کاربردی بسیار برجسته است، به شیوه محسوسی با نامساوی‌ها گره خورده است. شاید مشهورترین این نامساوی‌ها هم، که پس از گذشت سالیان دراز از معرفی آن همچنان در مرکز توجه بسیاری از پژوهشگران است، نامساوی ینسن[۱] می‌باشد. از سوی دیگر، کاربرد فضاهای ماتریسی در برخی شاخه‌های مدل‌سازی سیستم‌ها همانند مکانیک کوانتومی توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده و این مساله باعث شده حقایق شناخته شده آنالیز کلاسیک در این فضاها مورد بررسی قرار گیرند.

فرض کنیم $\mathbb{M}_n$ جبر همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد. هر بردار مانند $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ را یک ماتریس ستونی در نظر می‌گیریم. ماتریس A را هرمیتی[۲] نامیم هرگاه $A = A^*$ که در آن A^* ماتریسی است که از ترانهاده کردن ماتریس A و مزدوج کردن همه درایه‌های ماتریس حاصل به دست می‌آید. ماتریس هرمیتی A را مثبت معین نامیم هرگاه همه مقادیر ویژه A اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر مقادیر ویژه A اعداد حقیقی نامنفی باشند، ماتریس A را مثبت نیمه‌معین می‌نامیم. در ادامه مقاله، منظور از ماتریس مثبت، همان ماتریس مثبت نیمه‌معین است.

هر ماتریس هرمیتی مانند A دارای نمایش طیفی به صورت $A = U^*DU$ است که در آن U یک ماتریس یکانی و D یک ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند. با کمک این نمایش توابع ماتریسی قابل تعریف هستند. اگر f تابعی حقیقی و پیوسته روی بازه J باشد، آنگاه برای هر ماتریس هرمیتی مانند A که مقادیر ویژه‌اش در بازه J واقع باشند، $f(A)$ نیز

آدرس ایمیلها: kian@ub.ac.ir (محسن کیان).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.558037.1393

[1] Jensen

[2] Hermitian

یک ماتریس هرمیتی است که به صورت

$$A = U^* \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} U \quad \Longrightarrow \quad f(A) = U^* \begin{pmatrix} f(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\mu_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & f(\mu_n) \end{pmatrix} U$$

تعریف می‌شود. برای یافتن جزئیات بیشتر خواننده می‌تواند به کتاب [۳] مراجعه کند.

در ادامه، وقتی J یک بازه از اعداد حقیقی است، منظور از $\sigma(J)$ همه ماتریس‌های هرمیتی در $\mathbb{M}_n$ است که مقادیر ویژه آنها در بازه J قرار دارند.

نویسندگان [۹] نامساوی ینسن را به فرم حالت برداری[3] $f(\mathrm{v}^* A\mathrm{v}) \leq \mathrm{v}^* f(A)\mathrm{v}$ برای هر تابع حقیقی f روی J و هر ماتریس هرمیتی $A \in \sigma(J)$ و هر بردار یکه $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ ارائه داده‌اند. فرم عددی نامساوی ینسن به راحتی از این نامساوی نتیجه می‌شود. لازم است اشاره کنیم که نامساوی شناخته شده هولدر-مک‌کارتی[4] به صورت

$$\begin{aligned} (\mathrm{v}^* A\mathrm{v})^p &\leq \mathrm{v}^* A^p \mathrm{v} \qquad (p \geq 1 \quad \text{یا} \quad p \leq 0) \\ (\mathrm{v}^* A\mathrm{v})^p &\geq \mathrm{v}^* A^p \mathrm{v} \qquad (1 \leq p \leq 2) \end{aligned}$$

نشان‌دهنده نامساوی ینسن در مورد توابع توانی $f(t) = t^p$ هستند. نامساوی هولدر-مک‌کارتی خود ضامن برقراری بسیاری از نتایج است. در آنالیز کلاسیک، نامساوی‌های هولدر و مینکوسکی[5] کاملاً شناخته شده هستند و کاربرد فراوانی دارند. در آنالیز ماتریسی به دلیل ویژگی عدم جابجایی عمل ضرب در فضای ماتریسی، بررسی آنها با چالش‌هایی روبرو شده است. البته خاطر نشان می‌کنیم که نامساوی‌هایی مانند هولدر-مک‌کارتی، حالت برداری هستند و بررسی آنها چالش کمتری نسبت به نمونه‌های ماتریسی دارند.

[3] vector state
[4] Hölder-McCarthy
[5] Minkowski

در [۵] نشان داده‌ایم هنگامی که $p \geq ۲$، نامساوی هولدر-مک‌کارتی را می‌توان بهبود بخشید

$$(\mathrm{v}^*A\mathrm{v})^p \leq \mathrm{v}^*A^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*|A - \mathrm{v}^*A\mathrm{v}|^p\mathrm{v}. \qquad (۱.۱)$$

نامساوی (۱.۱) ابزاری برای بهبود رشته‌ای از نامعادلات به دست می‌دهد. برای مطالعه بیشتر به [۲، ۴، ۱۰] مراجعه کنید. در این مقاله با به کارگرفتن (۱.۱) سعی می‌کنیم حالت برداری برخی ازنامساوی‌های اشاره شده را بیان نمائیم. به ویژه، نامساوی‌های حالت برداری هولدر و مینکوسکی اثبات شده در [۹] را بهبود می‌بخشیم و برای ترسیم واضح‌تر نتایج، به فرم‌های عددی برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

۲. نتایج اصلی

ابتدا به معرفی رده‌ای از توابع حقیقی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. تابع $f:[\circ,\infty)\to\mathbb{R}$ را فوق درجه دوم گویند هرگاه برای هر $x\geq \circ$، عددی ثابت مانند $C_x\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y\geq\circ$ نامساوی

$$f(y)\geq f(x)+C_x(y-x)+f(|y-x|)$$

برقرار باشد. به راحتی دیده می شود که هر تابع فوق درجه دوم مثبت، یک تابع محدب است. بعلاوه، از تعریف ۱.۲ نتیجه می شود که رابطه

$$f(tx+(۱-t)y)\leq tf(x)+(۱-t)f(y)-tf((۱-t)|x-y|)-(۱-t)f(t|x-y|) \quad (۱.۲)$$

برای هر $x,y\geq\circ$ و هر $t\in[\circ,۱]$ برقرار است. دسته‌ای از توابع فوق درجه دوم شناخته شده، توابع توانی هستند. توابع $t\mapsto t^p$ و $t\mapsto -t^q$ برای هر $p\geq ۲$ و هر $q\in[۱,۲]$، فوق درجه دوم هستند. برای یافتن ویژگی‌های بیشتر از توابع فوق درجه دوم به [۱، ۷] مراجعه کنید.

همان‌طور که می‌دانیم، نامساوی مینکوسکی در مطالعه هندسه برخی فضاها کاربرد دارد. به عنوان مثال، برای نشان دادن ویژگی‌های نرم برخی از فضاهای نرم‌دار از معادل‌های این نامساوی بهره می‌گیرند. p-نرم‌ها، دسته‌ای از نرم‌های شناخته شده در فضای $\mathbb{R}^n$ هستند که به صورت

$$\|\mathrm{u}\|_p=\left(\sum_{i=۱}^{n}|u_i|^p\right)^{۱/p},\qquad (\mathrm{u}\in\mathbb{R}^n,\quad p\geq ۱),$$

تعریف می‌شوند. به عنوان اولین نتیجه این مقاله، تخمین دقیقی برای نامساوی مثلثی در مورد این نرم بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲. *اگر $p \geq ۲$، آنگاه*

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_p \leq \left(۱-\alpha(p)\|\mathrm{w}\|_p^p\right)^{۱/p}\left(\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p\right) \tag{۲.۲}$$

برای هر دو بردار $\mathrm{u},\mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$ برقرار است که در آن w برداری با درایه‌های $\frac{|v_i|}{\|\mathrm{v}\|_p}-\frac{|u_i|}{\|\mathrm{u}\|_p}$ است و

$$\alpha(p)=\frac{\|\mathrm{v}\|_p^p\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{u}\|_p^p\|\mathrm{v}\|_p}{(\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p)^{p+۱}}.$$

اگر $۱\leq p\leq ۲$، آنگاه عکس نامساوی (۲.۲) برقرار است. به‌ویژه، برای نرم اقلیدسی $\|\cdot\|_۲$، تساوی

$$\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_۲=\sqrt{۱-\alpha(۲)\|\mathrm{w}\|_۲^۲}\;(\|\mathrm{u}\|_۲+\|\mathrm{v}\|_۲) \tag{۳.۲}$$

برقرار است.

اثبات. فرض کنیم u,v دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند و $\lambda\in[۰,۱]$. اگر $p\geq ۲$، آنگاه با استفاده از تحدب تابع $t\mapsto|t|$ و صعودی بودن تابع $t\mapsto t^p$ می‌توانیم بنویسیم

$$\|(۱-\lambda)\mathrm{u}+\lambda\mathrm{v}\|_p^p=\sum_{i=۱}^n|(۱-\lambda)u_i+\lambda v_i|^p\leq\sum_{i=۱}^n((۱-\lambda)|u_i|+\lambda|v_i|)^p. \tag{۴.۲}$$

توجه کنید که تابع $t\mapsto t^p$ فوق درجه دوم است و با استفاده از (۱.۲) برای هر $i=۱,\ldots,n$ داریم

$$((۱-\lambda)|u_i|+\lambda|v_i|)^p\leq(۱-\lambda)|u_i|^p+\lambda|v_i|^p-(\lambda(۱-\lambda)^p+(۱-\lambda)\lambda^p)\,\big||u_i|-|v_i|\big|^p. \tag{۵.۲}$$

از (۴.۲) و (۵.۲) نتیجه می‌گیریم

$$\|(۱-\lambda)\mathrm{u}+\lambda\mathrm{v}\|_p^p\leq(۱-\lambda)\|\mathrm{u}\|_p^p+\lambda\|\mathrm{v}\|_p^p-(\lambda(۱-\lambda)^p+(۱-\lambda)\lambda^p)\left\|\mathrm{w}_{\mathrm{u},\mathrm{v}}\right\|_p^p \tag{۶.۲}$$

که در آن $\mathrm{w}_{\mathrm{u,v}}$ برداری در $\mathbb{R}^n$ به صورت $\mathrm{w}_{\mathrm{u,v}} = (|u_1| - |v_1|, \ldots, |u_n| - |v_n|)$ می‌باشد. با توجه به اینکه اگر یکی از بردارهای u یا v صفر باشد، آنگاه در (۲.۲) تساوی برقرار است، فرض می‌کنیم u و v دو بردار ناصفر در $\mathbb{R}^n$ باشند. واضح است که

$$\left(\frac{\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}\right)^p = \left\|\frac{\|\mathrm{u}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}\times\frac{\mathrm{u}}{\|\mathrm{u}\|_p}+\frac{\|\mathrm{v}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}\times\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_p}\right\|_p^p.$$

با قرار دادن $\lambda = \frac{\|\mathrm{u}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}$ و با جانشانی $\frac{\mathrm{u}}{\|\mathrm{u}\|_p}$ و $\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|_p}$ به ترتیب به‌جای u و v در (۶.۲) به دست می‌آوریم

$$\left(\frac{\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_p}{\|\mathrm{u}\|_p+\|\mathrm{v}\|_p}\right)^p \leq 1-\alpha(p)\,\|\mathrm{w}\|_p^p \tag{۷.۲}$$

که نامساوی مطلوب است و عدد $\alpha(p)$ همان عدد اشاره شده در صورت قضیه است. از سوی دیگر می‌دانیم تابع $f(t) = -t^q$ برای هر $1 \leq q \leq 2$ یک تابع فوق درجه دوم است. از این رو، با توجه به قسمت نخست برهان، درمی‌یابیم که نامساوی

$$\left(1-\alpha(q)\|\mathrm{w}\|_q^q\right)^{1/q}\left(\|\mathrm{u}\|_q+\|\mathrm{v}\|_q\right) \leq \|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|_q \qquad (1 \leq q \leq 2) \tag{۸.۲}$$

برای هر دو بردار $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$ برقرار است. اکنون اگر قرار دهیم $p = q = 2$، آنگاه (۲.۲) و (۸.۲) ما را به این نتیجه می‌رساند که تساوی (۳.۲) برقرار است. □

در مورد قضیه‌ای که بیان شد، لازم است چند نکته بیان کنیم. می‌دانیم که نامساوی مثلث تبدیل به تساوی می‌شود هرگاه یکی از بردارها ضریب ثابتی از دیگری باشد. با در نظر گرفتن این حقیقت، توجه کنید که قضیه ۲.۲ تخمینی دقیق برای این نامساوی به دست می‌دهد. اگر عددی مانند c موجود باشد که $\mathrm{u} = c\mathrm{v}$، آنگاه بردار w در (۲.۲)، بردار صفر است و در نتیجه تساوی مطلوب به ازای هر p حاصل می‌شود.

نکته بعد اینکه برای هر دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^n$، با استفاده از آنچه بیان شد داریم:

$$\left(\frac{\|u+v\|_p}{\|u\|_p+\|v\|_p}\right)^p \begin{cases} \leq ۱ - \alpha(p)\,\|w\|_p^p & p \geq ۲; \\ \geq ۱ - \alpha(p)\,\|w\|_p^p & ۱ \leq p \leq ۲; \\ = ۱ - \alpha(۲)\,\|w\|_۲^۲ & p = ۲. \end{cases} \tag{۹.۲}$$

خواننده‌ی علاقمند می‌تواند برای یافتن نتایجی در خصوص نامساوی مثلثی به مرجع [۸] مراجعه کند.

برای بیان ادامه نتایج این مقاله، به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۳.۲. *[۵، قضیه ۱.۲] اگر $f : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع فوق درجه دوم باشد، آنگاه نامعادله*

$$f(v^*Av) \leq v^*f(A)v - v^*f(|A - v^*Av|)v \tag{۱۰.۲}$$

برای هر ماتریس مثبت A و هر بردار یکه v در $\mathbb{C}^n$ برقرار است.

لم ۴.۲. *[۶، قضیه ۲.۳] فرض کنیم $g, \omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند. اگر $f : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ یک تابع فوق درجه دوم باشد، آنگاه نامعادله*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{v^*g(A)\omega(A)v}{v^*\omega(A)v}\right) \leq & \frac{۱}{v^*\omega(A)v} v^*(fog)(A)\omega(A)v \\ & - \frac{۱}{v^*\omega(A)v} v^* f\left(\left|g(A) - \frac{v^*g(A)\omega(A)v}{v^*\omega(A)v}\right|\right) v \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

برای هر ماتریس $A \in \sigma([a,b])$ و هر بردار v در $\mathbb{C}^n$ برقرار است.

اکنون می‌توانیم دومین نتیجه اصلی را بیان کنیم. در ادامه این مقاله نتایج حاصل از این قضیه را می‌آوریم که شامل بهبودی از نامساوی هولدر می‌باشند. برای تابع پیوسته f روی بازه $[۰, \infty)$ و ماتریس

مثبت A، و دو عدد حقیقی و مثبت x,m، کمیت Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_f(m,x,\mathrm{v},A)=f\left(\frac{\|\mathrm{v}\|^2}{m-\|\mathrm{v}\|^2}\left|x-\frac{\mathrm{v}^*A\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\mathrm{v}}\right|\right)+\frac{\mathrm{v}^*(f\left(\left|A-\frac{\mathrm{v}^*A\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\mathrm{v}}\right|\right)+f\left(\left|x-\frac{\mathrm{v}^*A\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\mathrm{v}}\right|\right))\mathrm{v}}{m-\|\mathrm{v}\|^2}.$$

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم $g,\omega:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند و A یک ماتریس مثبت باشد. اگر $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ یک تابع فوق درجه دوم باشد، آنگاه نامساوی*

$$f\left(\frac{mx-\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right)\geq\frac{mf(x)-\mathrm{v}^*f(g(A))\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}+\Delta_f(m,x,\omega(A)^{1/2}\mathrm{v},g(A)),\tag{۱۲.۲}$$

برای هر بردار $\mathrm{v}\in\mathbb{C}^n$ با شرط $\|\mathrm{v}\|^2\leq m$ و هر عدد مثبت x برقرار است.

اثبات. فرض کنیم a,b اعداد حقیقی مثبت باشند و p,q اعدادی حقیقی باشند به‌طوری‌که $q<0$ و $p+q>0$. در این صورت $\frac{p+q}{p}$ عددی بین صفر و یک است و با استفاده از (۱.۲) می‌توان نوشت

$$f\left(\frac{p+q}{p}a-\frac{q}{p}b\right)\leq\frac{p+q}{p}\left[f(a)-f\left(-\frac{q}{p}|a-b|\right)\right]-\frac{q}{p}\left[f(b)-f\left(\frac{p+q}{p}|a-b|\right)\right].$$

با قرار دادن y و $\frac{px+qy}{p+q}$ به ترتیب به جای b و a داریم

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)-f\left(\frac{-q}{p+q}|x-y|\right)\geq\frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}-\frac{q}{p+q}f\left(|x-y|\right)\tag{۱۳.۲}$$

اکنون با در اختیار داشتن ماتریس مثبت A و بردار $\mathrm{v}\in\mathbb{C}^n$، فرض کنیم $g,\omega:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند به طوری که برای عدد مثبت ثابتی مانند m داشته باشیم $\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}\leq m$. با قرار دادن

$$p:=m,\qquad q:=-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v},\qquad y:=\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}$$

در رابطه (۱۳.۲) به دست می‌آوریم

$$f\left(\frac{mx-\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right)-f\left(\frac{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\left|x-\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right|\right)$$
$$\geq\frac{mf(x)-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}f\left(\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right)}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}+\frac{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}f\left(\left|x-\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right|\right). \quad (۱۴.۲)$$

از طرف دیگر با استفاد ه از لم ۴.۲ می‌توانیم بنویسیم

$$mf(x)-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}f\left(\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right)$$
$$\geq mf(x)-\mathrm{v}^*f(g(A))\omega(A)\mathrm{v}+\mathrm{v}^*f\left(\left|g(A)-\frac{\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right|\right)\mathrm{v}. \quad (۱۵.۲)$$

از ترکیب (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نتیجه می‌گیریم

$$f\left(\frac{mx-\mathrm{v}^*g(A)\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}\right)\geq\frac{mf(x)-\mathrm{v}^*f(g(A))\omega(A)\mathrm{v}}{m-\mathrm{v}^*\omega(A)\mathrm{v}}+\Delta_f(m,x,\omega(A)^{۱/۲}\mathrm{v},g(A)),$$

که همان نتیجه مورد نظر است. □

قبل از پرداختن به کاربرد قضیه ۵.۲ در نامساوی هولدر و مینکوسکی، ابتدا دقت کنید هنگامی که توابع g و ω به ترتیب تابع همانی $g(t)=t$ و تابع ثابت $\omega(t)=۱$ باشند، حکم قضیه ۵.۲ به صورت زیر در می‌آید:

$$f\left(\frac{mx-\mathrm{v}^*A\mathrm{v}}{m-\|\mathrm{v}\|^۲}\right)\geq\frac{mf(x)-\mathrm{v}^*f(A)\mathrm{v}}{m-\|\mathrm{v}\|^۲}+\Delta_f(m,x,\mathrm{v},A). \quad (۱۶.۲)$$

در ادامه نتایج قضیه ۵.۲ را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $g,h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند و A یک ماتریس مثبت باشد. فرض کنیم $q\leq ۲$ و $m_۱$ عددی مثبت باشد که $\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}\leq m_۱$. اگر p نمایه مزدوج q باشد، آنگاه $p\geq ۲$ و در نتیجه تابع $t\mapsto t^p$ فوق درجه دوم است. فرض کنیم $m_۲$ عدد مثبتی باشد به طوری که $\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}\leq m_۲$.

با استفاده از قضیه ۵.۲ و قرار دادن $f(t)=t^p$، $\omega(t)=h(t)^q$ و جایگزینی تابع $g(t)h(t)^{-q/p}$ به جای تابع g خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&(m_1 x-\mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v})\\&\geq (m_1-\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v})^{1/q}\\&\times\left[(m_1x^p-\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v})+(m_1-\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v})\,\Delta_f(m_1,x,h(A)^{q/2}\mathrm{v},g(A)h(A)^{-q/p})\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

در پایان با قرار دادن $x:=(m_2/m_1)^{1/p}$ و جایگزینی m_1^q و m_2^p به ترتیب به جای m_1 و m_2، یک کران پایین برای نامساوی هولدر به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&(m_1 m_2-\mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v})\\&\geq \left(m_1^q-\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}\right)^{1/q}\\&\times\left[\left(m_2^p-\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}\right)+\left(m_1^q-\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}\right)\Delta_f(m_1^q,x,h(A)^{q/2}\mathrm{v},g(A)h(A)^{-q/p})\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

توجه کنید که طرف راست نامساوی فوق از عبارت

$$\left(m_1^q-\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}\right)^{1/q}\left(m_2^p-\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}\right)^{1/p}$$

بزرگتر است و در نتیجه برای $q\geq 2$، نامساوی اخیر بهتر از مشابه آن در [۹] است.

این در حالی است که با استفاده مستقیم از لم ۴.۲ می‌توان نامساوی‌های هولدر و مینکوسکی را بهبود بخشید. فرض کنیم $p\geq 2$ باشد که در آن صورت تابع $f(t)=t^p$ فوق درجه دوم است. فرض کنیم q نمایه مزدوج p باشد. با قرار دادن $\omega(t)=h(t)^q$ و جایگذاری $g(t)=g(t)h(t)^{-q/p}$ به جای تابع g در لم ۴.۲، نامساوی بهبود یافته حالت برداری هولدر حاصل می‌شود:

نتیجه ۶.۲. *اگر $g,h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند و $A\in\mathbb{M}_n$ یک ماتریس مثبت باشد، آنگاه*

نامساوی حالت برداری

$$\mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v} \le [\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}]^{\frac{1}{q}} \left[\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|g(A)h(A)^{1-q} - \frac{\mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}}\right|^p \mathrm{v}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\le [\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}]^{\frac{1}{q}} [\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}]^{\frac{1}{p}} \qquad (۱۷.۲)$$

برای هر $p \geq 2$ و هر بردار $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ برقرار است.

از طرف دیگر چون تابع $f(t) = -t^p$ برار هر $p \in [1, 2]$ یک تابع فوق درجه دوم است، با روندی مشابه بالا، عکس نامساوی هولدر به صورت زیر برقرار می‌باشد. دقت می‌کنیم که در این حالت، نامساوی هولدر همچنان برقرار است.

نتیجه ۷.۲. *اگر $g, h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند و $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس مثبت باشد، آنگاه نامساوی حالت برداری*

$$\begin{aligned}&[\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}]^{\frac{1}{q}} \left[\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|g(A)h(A)^{1-q} - \frac{\mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}}\right|^p \mathrm{v}\right]^{\frac{1}{p}}\\ &\le \mathrm{v}^*g(A)h(A)\mathrm{v}\\ &\le [\mathrm{v}^*h(A)^q\mathrm{v}]^{\frac{1}{q}} [\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

برای هر $p \in [1, 2]$ و هر بردار $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ برقرار است.

برای یافتن تصویری روشن‌تر، فرض می‌کنیم A ماتریسی قطری با درایه‌های مثبت $a_1, \ldots, a_n$ باشد و برای هر $i = 1, \ldots, n$ قرار می‌دهیم $g(a_i) = y_i$ و $h(a_i) = x_i$. اگر $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ برداری باشد که همه

درایه‌های آن عدد یک است، آنگاه (۱۷.۲) به نامساوی زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p - \sum_{i=1}^{n} \left| y_i x_i^{1-q} - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j^q} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (۱۸.۲)$$

در آنالیز کلاسیک، نامساوی شناخته شده مینکوسکی که یکی از نتایج نامساوی هولدر است، کاربرد زیادی دارد. نویسندگان در [۹] نسخه‌ی حالت برداری را برای آن ارائه داده‌اند

$$(\mathrm{v}^* (g(A) + h(A))^p \mathrm{v})^{\frac{1}{p}} \leq (\mathrm{v}^* g(A)^p \mathrm{v})^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{v}^* h(A)^p \mathrm{v})^{\frac{1}{p}} \quad (p > 1). \quad (۱۹.۲)$$

با استفاده از نتیجه ۶.۲ می‌توانیم نامساوی حالت برداری مینکوسکی را نیز بهبود دهیم.

نتیجه ۸.۲. *اگر $g, h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ توابعی پیوسته باشند و $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس مثبت باشد، آنگاه نامساوی حالت برداری*

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{v}^* (g(A) + h(A))^p \mathrm{v})^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\mathrm{v}^* g(A)^p \mathrm{v} - \mathrm{v}^* \left| (I + g(A)^{-1} h(A))^{-1} - \frac{\mathrm{v}^* g(A)(g(A) + h(A))^{p-1} \mathrm{v}}{\mathrm{v}^* (g(A) + h(A))^p \mathrm{v}} \right|^p \mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\mathrm{v}^* h(A)^p \mathrm{v} - \mathrm{v}^* \left| (I + g(A) h(A)^{-1})^{-1} - \frac{\mathrm{v}^* h(A)(g(A) + h(A))^{p-1} \mathrm{v}}{\mathrm{v}^* (g(A) + h(A))^p \mathrm{v}} \right|^p \mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

برای هر $p \geq ۲$ و هر بردار $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ برقرار است.

اثبات. فرض کنیم $p \geq ۲$ و q نمایه مزدوج p باشد. با بکارگیری نتیجه ۶.۲ و جایگذاری تابع

$(g+h)^{p-1}$ به جای تابع h به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^{p-1}g(A)\mathrm{v}\right)\\
&\leq\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v}-\mathrm{v}^*\left|(I+g(A)^{-1}h(A))^{-1}-\frac{\mathrm{v}^*g(A)(g(A)+h(A))^{p-1}\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}}\right|^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{۲۰.۲}$$

در مورد نامساوی بالا توجه کنید که $(p-1)q=p$ و

$$g(A)\left(g(A)+h(A)\right)^{(p-1)(1-q)}=(I+g(A)^{-1}h(A))^{-1}.$$

به طور مشابه، بکارگیری نتیجه ۶.۲ و جایگذاری تابع $(g+h)^{p-1}$ به جای تابع g ما را به رابطه زیر می‌رساند

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^{p-1}h(A)\mathrm{v}\right)\\
&\leq\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\mathrm{v}^*h(A)^p\mathrm{v}-\mathrm{v}^*\left|(I+g(A)h(A)^{-1})^{-1}-\frac{\mathrm{v}^*h(A)(g(A)+h(A))^{p-1}\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}}\right|^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

با جمع کردن طرفین (۲۰.۲) و (۲۱.۲) و ضرب کردن طرفین رابطه حاصل در

$$\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}\right)^{\frac{-1}{q}}$$

به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. باید دقت کرد که

$$\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}\right)=\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^{p-1}g(A)\mathrm{v}\right)+\left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^{p-1}h(A)\mathrm{v}\right).$$

□

باید اشاره کنیم همان‌طور که پیدا است، طرف راست نامساوی داده شده در نتیجه ۸.۲ از عبارت

$$(\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v})^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{v}^*h(A)^p\mathrm{v})^{\frac{1}{p}}$$

کوچکتر است.

زمانی که $1 \leq p \leq 2$، از آنجائیکه تابع $f(t) = -t^p$ فوق درجه دوم است، می‌توان دریافت

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v})^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{v}^*h(A)^p\mathrm{v})^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|(I+g(A)^{-1}h(A))^{-1} - \frac{\mathrm{v}^*g(A)(g(A)+h(A))^{p-1}\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}}\right|^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\mathrm{v}^*h(A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|(I+g(A)h(A)^{-1})^{-1} - \frac{\mathrm{v}^*h(A)(g(A)+h(A))^{p-1}\mathrm{v}}{\mathrm{v}^*\left(g(A)+h(A)\right)^p\mathrm{v}}\right|^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

لازم است اشاره کنیم که در نامساوی‌های بیان شده، بکارگیری توابع دلخواه g و h سبب می‌شود با انتخاب مناسب به جای این توابع بتوان نتایج فراوانی به دست آورد. به عنوان مثال، قرار دهید $g(t) = t$ و $h(t) = t^{-1}$. دراین صورت نتیجه ۶.۲ به فرم

$$(\mathrm{v}^*A^{-q}\mathrm{v})^{\frac{-1}{q}} \leq \left(\mathrm{v}^*g(A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|A^q - \frac{1}{\mathrm{v}^*A^{-q}\mathrm{v}}\right|^p\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{p}}$$

برای هر بردار یکه $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^n$ و هر عدد $p \geq 2$ برقرار است. در حالتی که $1 \leq p \leq 2$، نامساوی اخیر برعکس خواهد شد.

به‌علاوه، فرض کنیم α یک عدد حقیقی مثبت باشد و $p \geq 2$. بکارگیری نتیجه ۸.۲ با توابع $g(t) = t$ و $h(t) = \alpha - t$ منجر به نامساوی

$$\alpha \leq \left[\mathrm{v}^*A^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|A - \mathrm{v}^*A\mathrm{v}\right|^p\mathrm{v}\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\mathrm{v}^*(\alpha - A)^p\mathrm{v} - \mathrm{v}^*\left|A - \mathrm{v}^*A\mathrm{v}\right|^p\mathrm{v}\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (۲۲.۲)$$

برای هر بردار یکه $v \in \mathbb{C}^n$ و هر ماتریس مثبت A با شرط $\|A\| \leq \alpha$ می‌شود.

مانند قبل می‌توان برای درک بهتر آنچه رخ می‌دهد، حالت عددی این نامساوی‌ها را بررسی کرد. فرض کنیم $x_1, \ldots, x_n$ اعداد مثبتی باشند که به ترتیب نزولی مرتب شده‌اند. قرار می‌دهیم $A = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$. در این صورت نامساوی

$$x_1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| x_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_1 - x_i)^p - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| x_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

برای هر عدد $p \geq 2$ برقرار است.

مراجع

[۱] S. Abramovich، G. Jameson and G. Sinnamon، Refining Jensen's inequality، *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.)*، (۹۵)۴۷ (۲-۱) ،(۲۰۰۴) .۱۴-۳

[۲] M.W. Alomari، S. Sahoo and M. Bakherad، Further numerical radius inequalities، *J. Math. Inequal.*، ۱۶ ،(۲۰۲۲) .۳۲۶-۳۰۷

[۳] R. Bhatia، *Positive Definite Matrices*، Princeton University Press، .۲۰۰۷

[۴] Z. Heydarbeygi and M. Amyari، Some refinements of the numerical radius inequalities via Young inequality، *Kragujevac J. Math.*، ۴۵ ،(۲۰۲۱) .۲۰۲-۱۹۱

[۵] M. Kian، Operator Jensen inequality for superquadratic functions، *Linear Algebra Appl.*، ۴۵۶ ،(۲۰۱۴) .۸۷-۸۲

[۶] M. Kian and S.S. Dragomir، Inequalities involving superquadratic functions and operators، *Mediterr. J. Math.*، ۱۱ ،(۲۰۱۴) .۱۲۱۴-۱۲۰۵

[۷] F. Mitroi-Symeonidis and N. Minculete، On the Jensen functional and superquadraticity، *Aequat. Math.*، ۹۰ ،(۲۰۱۶) .۷۱۸--۷۰۵

[۸] L. Maligranda، Simple Norm Inequalities، *Amer. Math. Monthly*، ۱۱۳ ،(۲۰۰۶) .۲۶۰-۲۵۶

[۹] B. Mond and J. Pe�cari�c، Convex inequalities in Hilbert space، *Houston J. Math.*، ۱۹ ،(۱۹۹۳) .۴۲۰-۴۰۵

[۱۰] M.E. Omidvar، H.R. Moradi and K. Shebrawi، Sharpening some classical numerical radius inequalities، *Operators and Matrices*، ۱۲ ،(۲۰۱۸) .۴۱۶-۴۰۷