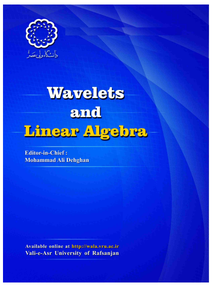
موجک‌ها و جبرخطی ۹(۲) (۱۴۰۱) ۱۰۴-۷۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

همریختی‌های پیوسته روی $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$

سید صادق صالحی امیری*[آ]، علیرضا خلیلی اسبویی[ب]

[آ]گروه ریاضی، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران

[ب]گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۱۹ بهمن ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۸ تیر ۱۴۰۱
دسترسی آنلاین: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱

ادیتور رابط: فاطمه پنجه علی‌بیک

کلمات کلیدی:

گروه خطی عام، همریختی پیوسته، معادله‌ی تابعی.

چکیده

فرض کنید $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ گروهِ ماتریس‌های وارون‌پذیر ۲×۲ روی میدان مختلط همراه با عمل ضرب معمولِ ماتریس‌ها باشد. دراین مقاله، فرم عمومی همه همریختی‌های پیوسته روی $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ تعیین شده است. همچنین به عنوان نتیجه‌ی قضیه اصلی، فرم عمومی همه یکریختی‌های پیوسته روی $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ مشخص شده است.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: salehisss@baboliau.ac.ir (سید صادق صالحی امیری)، a.khalili@cfu.ac.ir (علیرضا خلیلی اسبویی).

http://doi.org/10.22072/wala.2022.548476.1364

۱. مقدمه

در سراسر این مقاله، میدان‌های اعداد حقیقی و مختلط را به ترتیب با علامت‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نشان می دهیم. همچنین در کلیه‌ی تعاریف و قضایا منظور از ماتریس حقیقی و مختلط A از مرتبه n، ماتریس مربعی $n \times n$ است که درایه‌های آن به ترتیب متعلق به میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است. فرض کنید نگاشت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ همریختی جمعی باشد، یعنی

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{۱.۱}$$

معادله‌ی اخیر به‌عنوان معادله‌ی تابعی جمعی کوشی معروف است. این معادله‌ی تابعی اولین بار توسط لُژاندر در سال ۱۷۹۱ معرفی گردید، اما کوشی اولین فردی بود که در سال ۱۸۲۱ فرم عمومی آن را در حالتی که f پیوسته است تعیین نمود [۹]. وی نشان داد که فرم پیوسته‌ی چنین نگاشت‌هایی عبارت‌اند از:

$$f(x) = cx, \quad (x \in \mathbb{R})$$

که در آن c عددی حقیقی است. به آسانی ملاحظه می‌شود که حتی اگر f در یک نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد آن‌گاه بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. تا مدت‌ها مساله‌ی وجود تابع ناپیوسته جمعی، به عنوان یک مساله‌ی باز حل نشده باقی مانده بود. ریاضیدانان نه می‌توانستند نشان دهند که همریختی‌های جمعی روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و نه می‌توانستند مثالی از یک همریختی ناپیوسته روی $\mathbb{R}$ ارائه کنند، تا اینکه در سال ۱۹۰۵ یک ریاضیدان آلمانی به نام هَمِل موفق شد به کمک مفهوم فضای برداری روی یک میدان، مثالی از همریختی ناپیوسته روی $\mathbb{R}$ ارائه کند. این مطلب اهمیت پیوسته بودن چنین همریختی‌هایی را نشان داد. متاسفانه ضابطه‌ی همریختی‌هایِ ناپیوسته جمعی ملموس نیستند و نمودار پیچیده‌ای دارند. در واقع نمودار چنین نگاشت‌هایی در فضای متریک $\mathbb{R}^۲$ (با متر معمولی) چگال هستند [۹].

یکی از کاربردهای بسیار مهم شناختِ فرم عمومی همریختی‌های پیوسته جمعی روی $\mathbb{R}$، تعیین فرم عمومی معادلات تابعی مشهور دیگر است. به عنوان مثال فرم عمومی جواب‌های پیوسته‌ی معادله‌ی تابعی

$$g(x + y) = g(x)g(y), \quad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{۲.۱}$$

به‌صورت‌های $g(x) = ۰$ یا $g(x) = e^{cx}$ است که در آن c عددی حقیقی است [۱].
به عنوان مثال دیگر، فرم عمومی جواب‌های پیوسته‌ی معادله‌ی تابعی $h(z + w) = h(z) + h(w)$ که در آن $z, w \in \mathbb{C}$ و $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نگاشتی مختلط است، عبارت است از $h(z) = c_۱ z + c_۲ \bar{z}$ است که در آن $c_۱, c_۲ \in \mathbb{C}$، [۱].

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های مربعی از مرتبه n روی میدان $\mathbb{C}$ را با $M_n(\mathbb{C})$ نشان می‌دهیم. $M_n(\mathbb{C})$ به همراه جمع و ضربِ در اسکالر معمول در آن تشکیل فضای‌برداری روی میدان $\mathbb{C}$ می‌دهد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های وارون‌پذیر در $M_n(\mathbb{C})$ را با نماد $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ نشان می‌دهیم. معلوم است که دترمینان هر عضو $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ ناصفر است. به‌آسانی ملاحظه می‌شود که $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ با عمل ضرب ماتریسی یک گروه است. گروه $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ را گروه خطی عام از درجه n روی $\mathbb{C}$ می‌نامیم. از آن‌جا که گروه‌های ضربی $\mathbb{GL}_۱(\mathbb{C})$ و $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{۰\}$ یکریخت هستند ما آنها را یکسان در نظر می‌گیریم. واضح است که مجموعه همه اعضایی از $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ که دترمینان هر یک از آن‌ها برابر ۱ است زیرگروهی از $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ است. این زیرگروه را با نماد $\mathbb{SL}_n(\mathbb{C})$ نشان داده و گروه خطی خاص از درجه n روی میدان $\mathbb{C}$ می نامیم.

طیفِ ماتریس مربعی A را با علامت $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A. روی فضای برداری $M_n(\mathbb{C})$ نرم عملگری معمول (یعنی نرم ماتریس A عبارت است از ریشه دوم بزرگترین عضو مجموعه $\sigma(AA^*)$ که در آن $A^* = (\overline{A})^t$) را در نظر گرفته و آن را مجهز به متر می‌کنیم. از این‌رو $M_n(\mathbb{C})$ به همراه این متر تبدیل به یک فضای متریک می‌شود و بحث در مورد نگاشت‌های پیوسته روی زیرمجموعه‌های آن با معنی است.

ماتریس مربعی A را برگشت می‌گوییم هرگاه $A^۲ = I$ که در آن I ماتریس واحد است. به آسانی ملاحظه می‌شود که اگر A یک برگشت باشد آن‌گاه $\sigma(A) \subseteq \{-۱, ۱\}$. ماتریس برگشت A را غیر بدیهی گوییم هرگاه $A \neq \pm I$. در سراسر این مقاله، $J := \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$، $T := \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$ و $S := \frac{۱}{\sqrt{۲}} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$. سایر نمادهای به کار برده شده در این مقاله استاندارد بوده و از نمادهای [۲] استفاده شده است.

در [۸]، اوملادیک، رجوی و شِمرل فرم عمومی همه‌ی همریختی‌ها از $\mathbb{C}^*$ به $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ را مشخص کرده‌اند. در دو دهه‌ی گذشته، مقالات متعددی در زمینه‌ی نگاشت‌های حافظ ضربِ سه‌تایی ژوردان روی زیرمجموعه‌های خاصی از جبرهای باناخ، خصوصاً جبر باناخِ $M_n(\mathbb{C})$ نوشته شده است (برای اطلاع بیشتر به [۵]، [۶]، [۷]، [۱۰]، [۱۱] و [۱۲] مراجعه شود). در [۱۰]، تقوی و صالحی فرم

عمومی همه‌ی نگاشت‌های حافظ ضربِ سه‌تایی ژوردان از $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ به $\mathbb{C}^*$ را تعیین نمودند. نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_m(\mathbb{C})$ را حافظ ضربِ سه‌تایی ژوردان گوئیم هرگاه

$$\varphi(ABA) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(A), \quad A, B \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C}).$$

بدیهی است که اگر نگاشت φ همریختی گروهی باشد، حافظ ضربِ سه‌تایی ژوردان است (اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست)؛ از این‌رو به کمک قضیه اصلی در [۱۰]، فرم عمومی همه‌ی همریختی‌ها از $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ به $\mathbb{C}^*$ مشخص می‌شود. همچنین به کمک قضیه اصلی در [۱۲]، فرم عمومی همه‌ی همریختی‌های پیوسته از $\mathbb{C}^*$ به $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ که در آن $n = 2, 3$ تعیین می‌شود. در مقالات اشاره شده، حداقل یکی از مجموعه‌های دامنه یا هم‌دامنه $\mathbb{C}^*$ بوده است. از آن‌جا که $\mathbb{C}^*$ گروهی آبلی است تعیین فرم عمومی چنین همریختی‌هایی را هموار می‌سازد. در این مقاله، فرم عمومی همه‌ی همریختی‌های پیوسته از $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ به $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ مشخص شده است که مجموعه‌های دامنه و هم‌دامنه‌ی آن‌ها گروه‌های غیرآبلی هستند. قضیه‌ی زیر فرم عمومی کلیه‌ی همریختی‌های پیوسته روی $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ را مشخص می‌سازد.

قضیه ۱.۱. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ همریختی پیوسته‌ی گروهی باشد. آن‌گاه اعداد صحیح k, k_1, k_2، اعداد حقیقی t, t_1, t_2, a, a_1, a_2، عددِ مختلط λ و $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ وجود دارند به طوری‌که فرم φ یکی از صورت‌های زیر است:*

۱. $\varphi(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} (det(A))^{k_1}|det(A)|^{t_1}e^{ia_1 ln|det(A)|} & 0 \\ 0 & (det(A))^{k_2}|det(A)|^{t_2}e^{ia_2 ln|det(A)|} \end{pmatrix}P$؛

۲. $\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda ln|det(A)| & 1 \end{pmatrix}P$؛

۳. $\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}AP$؛

۴. $\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}\overline{A}P$؛

۵. $\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}(A^{-1})^tP$؛

۶. $\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}((\overline{A})^{-1})^tP$.

نتیجه زیر فرم عمومی تمامی یکریختی‌های پیوسته روی $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ را مشخص می‌کند.

نتیجه ۲.۱. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ یکریختی پیوسته‌ی گروهی باشد؛ در این صورت $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که فرم φ یکی از صورت‌های زیر است:*

۱. $\varphi(A) = P^{-1}AP$؛
۲. $\varphi(A) = P^{-1}\overline{A}P$؛
۳. $\varphi(A) = P^{-1}(A^{-1})^tP$؛
۴. $\varphi(A) = P^{-1}((\overline{A})^{-1})^tP$.

۲. نتایج اصلی

در ابتدای این بخش چند لم اساسی را که در برهان قضیه‌ی اصلی استفاده می‌شوند بیان می‌کنیم. لم زیر ساختار کلیه‌ی برگشت‌های $\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ را مشخص می‌کند.

لم ۱.۲. *$A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ برگشت است اگر و فقط اگر دارای یکی از صورت‌های زیر باشد:*

۱. $A = \pm I$؛
۲. $A = \pm J$؛
۳. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$، که در آن $a \in \mathbb{C}$ و $b \in \mathbb{C}^*$؛
۴. $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$، که در آن $a \in \mathbb{C}$ و $c \in \mathbb{C}^*$.

اثبات. با یک محاسبه مستقیم حکم نتیجه می‌شود. □

لم ۲.۲. *[۳] هر ماتریس مربعی با دترمینان ± 1 روی یک میدان دلخواه را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب حداکثر ۴ برگشت نوشت.*

لم زیر ساختار نگاشت‌های ضربی پیوسته روی $\mathbb{C}^*$ را مشخص می‌کند.

لم ۳.۲. *[۱۰] فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی پیوسته‌ی گروهی باشد؛ در این‌صورت عدد صحیح k، اعداد حقیقی a و t وجود دارند به طوری‌که*

$$\varphi(z) = z^k|z|^te^{ialn|z|}, \qquad (z \in \mathbb{C}^*).$$

لم ۴.۲. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_m(\mathbb{C})$ همریختی گروهی باشد. یعنی*

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B), \quad (A, B \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})).$$

در این‌صورت اگر $A, B \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ متشابه باشند، آن‌گاه $\varphi(A), \varphi(B) \in \mathbb{GL}_m(\mathbb{C})$ متشابه‌اند.

اثبات. طبق فرض ماتریس A با ماتریس B متشابه است؛ بنابراین ماتریس $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که $B = P^{-1}AP$. چون φ همریختی گروهی است داریم:

$$\varphi(B) = \varphi(P^{-1}AP) = \varphi(P^{-1})\varphi(A)\varphi(P) = (\varphi(P))^{-1}\varphi(A)\varphi(P).$$

بنابراین ماتریس $\varphi(A)$ با ماتریس $\varphi(B)$ متشابه است. □

لم ۵.۲. *فرض‌کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ همریختی‌ گروهی باشد؛ در این‌صورت نگاشت ضربی $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ وجود دارد به طوری‌که*

$$\varphi(A) = \psi(detA), \quad (A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})).$$

اثبات. طبق قضیه‌ی ۳ از [۱۰]، نگاشت ضربی $\psi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ و ثابت $c \in \{-۱, ۱\}$ وجود دارند به طوری‌که

$$\varphi(A) = c\,\psi(detA), \quad (A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})).$$

چون φ همریختی گروهی است پس $\varphi(I) = ۱$؛ از این‌رو $c\psi(۱) = ۱$. از ضربی بودن ψ نتیجه می‌شود $\psi(۱) = ۱$. بنابراین $c = ۱$ و حکم ثابت است. □

به عنوان کاربردی از لم‌های (۳.۲) و (۵.۲)، نتیجه‌ی زیر را که در مورد فرم همریختی‌های پیوسته از گروه $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ به گروه $\mathbb{C}^*$ است بیان می‌کنیم.

نتیجه ۶.۲. *فرض‌کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ همریختی پیوسته‌ی‌ گروهی باشد؛ در این‌صورت عدد صحیح k، اعداد حقیقی a و t وجود دارند به طوری‌که*

$$\varphi(A) = (detA)^k |detA|^t e^{ialn|detA|}, \quad (A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})).$$

لم زیر نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۱ از [۱۲] است، که برهان آن مشابه اثبات لم (۵.۲) می‌باشد.

لم ۷.۲. *فرض‌کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ همریختی‌ گروهی باشد؛ در این‌صورت فرم φ به یکی از صورت‌های زیر است:*

۱. *$\varphi(z) = P^{-۱}\begin{pmatrix}\psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z)\end{pmatrix}P$، که در آن $z \in \mathbb{C}^*$، $P \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ و نگاشت‌های $\psi_۱, \psi_۲ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی گروهی هستند؛*

۲. *$\varphi(z) = \eta(z)P^{-۱}\begin{pmatrix}۱ & ۰ \\ \zeta(z) & ۱\end{pmatrix}P$، که در آن $z \in \mathbb{C}^*$، $P \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$، نگاشت $\zeta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ در شرط $\zeta(zw) = \zeta(z) + \zeta(w)$ به ازای هر $z, w \in \mathbb{C}^*$ صدق نموده و نگاشت $\eta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی گروهی است.*

لم زیر نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی اصلی (۱.۱) از [۱۲] است، که برهان آن مشابه اثبات لم (۵.۲) است.

لم ۸.۲. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ همریختی پیوسته‌ی گروهی باشد. آن‌گاه اعداد صحیح k، $k_۱$، $k_۲$، اعداد حقیقی t، $t_۱$، $t_۲$، a، $a_۱$، $a_۲$، عددِ مختلط λ و $P \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ وجود دارند به طوری‌که فرم φ یکی از صورت‌های زیر است:*

۱. $\varphi(z) = P^{-۱}\begin{pmatrix} z^{k_۱}|z|^{t_۱}e^{ia_۱ ln|z|} & ۰ \\ ۰ & z^{k_۲}|z|^{t_۲}e^{ia_۲ ln|z|}\end{pmatrix}P$؛

۲. $\varphi(z) = z^k|z|^te^{ialn|z|} \quad P^{-۱}\begin{pmatrix}۱ & ۰ \\ \lambda ln|z| & ۱\end{pmatrix}P$.

لم ۹.۲. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ همریختی گروهی باشد به طوری‌که $\varphi(J) = \pm I$؛ در این‌صورت تصویر هر ماتریسِ برگشت غیربدیهی تحت φ برابر است با $\pm I$.*

اثبات. چون φ همریختی گروهی است پس $\varphi(I) = I$. فرض کنید $A \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ یک ماتریس برگشت غیربدیهی باشد. می‌دانیم طیف ماتریس برگشت غیربدیهی برابر با مجموعه‌ی$\{۱, -۱\}$ است؛ بنابراین A با J متشابه است؛ از این‌رو $P \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که $A = P^{-۱}JP$. ماتریس P را می‌توان طوری انتخاب نمود $det(P) = ۱$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های $U_۱, U_۲, U_۳, U_۴ \in \mathbb{GL}_۲(\mathbb{C})$ وجود دارند به‌طوری‌که $P = U_۱U_۲U_۳U_۴$؛ از این‌رو

$$\varphi(A) = \varphi(P^{-۱}JP) = \varphi(P)^{-۱}\varphi(J)\varphi(P) =$$

$$= \varphi(U_4^{-1})\varphi(U_3^{-1})\varphi(U_2^{-1})\varphi(U_1^{-1})\varphi(J)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)$$

$$= \varphi(U_4)\varphi(U_3)\varphi(U_2)\varphi(U_1)(\pm I)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)$$

$$= \pm I\varphi(U_4)\varphi(U_3)\varphi(U_2)\varphi(U_1^2)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)$$

$$= \pm I\varphi(U_4)\varphi(U_3)\varphi(U_2)\varphi(I)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)$$

$$= \pm I\varphi(U_4)\varphi(U_3)\varphi(U_2^2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)$$

$$= \pm I\varphi(U_4)\varphi(U_3)\varphi(I)\varphi(U_3)\varphi(U_4) = \pm I\varphi(U_4)\varphi(U_3^2)\varphi(U_4)$$

$$= \pm I\varphi(U_4)\varphi(I)\varphi(U_4) = (\pm I)\varphi(U_4^2) = (\pm I)\varphi(I) = \pm I.$$

□

لم ۲.۱۰. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ همریختی گروهی است و $\varphi(J) = J$. اگر $\lambda \in \mathbb{C}^*$ وجود داشته باشد به طوری‌که $\varphi(\lambda I)$ مضرب ماتریس واحد نباشد آن‌گاه فرم φ عبارت است از*

$$\varphi(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1(A) & 0 \\ 0 & \varphi_2(A) \end{pmatrix}P, \qquad (A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})),$$

که در آن $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ همریختی گروهی هستند.

اثبات. با توجه به فرم کانونی ژوردان، برای $\varphi(\lambda I)$ دو حالت زیر امکان‌پذیر است. (رجوع شود به [۴] صفحه ۲۴۷)

۱. $B_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \sim \varphi(\lambda I)$، که در آن z_1 و z_2 عضوهای متمایز $\mathbb{C}^*$ هستند؛

۲. $B_2 = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 1 & z \end{pmatrix} \sim \varphi(\lambda I)$، که در آن z عضوی از $\mathbb{C}^*$ است.

ابتدا فرض کنید $\varphi(\lambda I) \sim B_1$ (یعنی $\varphi(\lambda I)$ با B_1 متشابه است)؛ در این‌صورت ماتریس $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که $\varphi(\lambda I) = P^{-1}B_1P$. فرض کنید $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ و

$C := P\varphi(A)P^{-1} = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$؛ در این‌صورت داریم:

$$B_1C = (P\varphi(\lambda I)P^{-1})(P\varphi(A)P^{-1}) = P\varphi(\lambda I)\varphi(A)P^{-1} = P\varphi((\lambda I)A)P^{-1} = P\varphi(A(\lambda I))P^{-1} = (P\varphi(A)P^{-1})(P\varphi(\lambda I)P^{-1}) = CB_1.$$

چون $z_1 \neq z_2$، از تساوی $B_1C = CB_1$ نتیجه می‌شود $n = o = 0$؛ بنابراین نگاشت‌های $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ وجود دارند به طوری‌که

$$P\varphi(A)P^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_1(A) & 0 \\ 0 & \varphi_2(A) \end{pmatrix}.$$

چون φ همریختی گروهی است داریم:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(AB) & 0 \\ 0 & \varphi_2(AB) \end{pmatrix} = P\varphi(AB)P^{-1} = (P\varphi(A)P^{-1})(P\varphi(B)P^{-1}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A) & 0 \\ 0 & \varphi_2(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(B) & 0 \\ 0 & \varphi_2(B) \end{pmatrix}.$$

بنابراین $\varphi_1(AB) = \varphi_1(A)\varphi_1(B)$ و $\varphi_2(AB) = \varphi_2(A)\varphi_2(B)$ به ازای هر $A, B \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$. در نتیجه

$$\varphi(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1(A) & 0 \\ 0 & \varphi_2(A) \end{pmatrix}P.$$

که در آن $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ همریختی گروهی هستند.

حال فرض کنید $\varphi(\lambda I) \sim B_2$؛ در این‌صورت $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که

$$\varphi(\lambda I) = P^{-1}B_2P.$$

مشابه حالت قبل به آسانی ملاحظه می‌شود $B_2C = CB_2$. از این تساوی نتیجه می‌شود $n = 0$ و $m = p$. بنابراین $m_1 \in \mathbb{C}^*$ و $o_1 \in \mathbb{C}$ وجود دارند به طوری‌که $\varphi(J) = P^{-1}\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ o_1 & m_1 \end{pmatrix}P$. طبق لم

(۴.۲)، ماتریس‌های $\varphi(J) = J$ و $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ o_1 & m_1 \end{pmatrix}$ متشابه هستند، که یک تناقض است. زیرا ماتریس‌های متشابه دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند. بنابراین حالت دوم نمی‌تواند رخ دهد و حکم ثابت است. $\square$

لم ۱۱.۲. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ همریختی گروهی است و $\varphi(J) = J$؛ در این‌صورت همریختی‌های $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ وجود دارند به‌طوری که*

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 \\ 0 & \psi_2(z) \end{pmatrix}, \qquad (z \in \mathbb{C}^*).$$

اثبات. نگاشت $i : \mathbb{C}^* \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ را با ضابطه $i(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم؛ در این‌صورت نگاشت $\varphi' : \mathbb{C}^* \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ با ضابطه $\varphi'(z) = \varphi \circ i(z)$ همریختی گروهی است. طبق لم (۷.۲) حالت‌های زیر ممکن است رخ دهند.

۱. $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi \circ i(z) = \varphi'(z) = P^{-1}\begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 \\ 0 & \psi_2(z) \end{pmatrix}P$؛

۲. $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi \circ i(z) = \varphi'(z) = \eta(z)P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta(z) & 1 \end{pmatrix}P$،

که در آن‌ها $\psi_1, \psi_2, \eta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی گروهی هستند و نگاشتِ $\zeta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ در شرط

$$\zeta(zw) = \zeta(z) + \zeta(w)$$

صدق می‌کند. چون $\varphi(J) = J$ حالت دوم امکان‌پذیر نیست؛ زیرا در غیر این‌صورت با فرض $z = -1$ داریم:

$$\eta(-1)P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \zeta(-1) & 1 \end{pmatrix}P = PJ$$

بدیهی است که $\zeta(1) = 0$؛ بنابراین $\zeta(-1) + \zeta(-1) = \zeta((-1)(-1)) = \zeta(1) = 0$؛ در نتیجه $\zeta(-1) = 0$ و $J = \eta(-1)I$ که یک تناقض است.

اکنون حالت اول را در نظر می‌گیریم، مجدداً چون $\varphi(J) = J$ با فرض $z = -۱$ داریم:

$$\begin{pmatrix} \psi_۱(-۱) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(-۱) \end{pmatrix} P = PJ \qquad (۱.۲)$$

چون $\psi_۱$ و $\psi_۲$ همریختی گروهی هستند؛ پس $\psi_۱(-۱) = \pm ۱$ و $\psi_۲(-۱) = \pm ۱$.

اگر $\psi_۱(-۱) = \psi_۲(-۱) = ۱$ یا $\psi_۱(-۱) = \psi_۲(-۱) = -۱$، آن‌گاه به‌ترتیب $J = I$ یا $J = -I$، که یک تناقض است.

اگر $\psi_۱(-۱) = -\psi_۲(-۱) = ۱$، آن‌گاه با فرض $P = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$، از رابطه (۱.۲)، داریم $o = n = ۰$؛ بنابراین P یک ماتریس قطری است؛ در نتیجه

$$\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix}) = P^{-۱} \begin{pmatrix} \psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z) \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} m^{-۱} & ۰ \\ ۰ & p^{-۱} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & ۰ \\ ۰ & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z) \end{pmatrix}.$$

اگر $-\psi_۱(-۱) = \psi_۲(-۱) = ۱$، آن‌گاه با فرض $P = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$، از رابطه (۱.۲)، نتیجه می‌شود که $m = p = ۰$؛ بنابراین $P = \begin{pmatrix} ۰ & n \\ o & ۰ \end{pmatrix}$. در نتیجه

$$\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix}) = P^{-۱} \begin{pmatrix} \psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z) \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} ۰ & o^{-۱} \\ n^{-۱} & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_۱(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۲(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & n \\ o & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_۲(z) & ۰ \\ ۰ & \psi_۱(z) \end{pmatrix}.$$

بنابراین حکم ثابت است. □

لم ۱۲.۲. *فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ همریختی پیوسته‌ی گروهی، $\varphi(J) = J$ و $\varphi(\lambda I)$ به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}^*$ مضربی از ماتریس واحد باشد. آن‌گاه $\varphi(-J) = J$ یا $\varphi(-J) = -J$ و $b \in \mathbb{C}^*$ وجود دارد به طوری‌که $\varphi(T) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$، که در آن $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

اثبات. از تساوی $(-J)J = J(-J)$ نتیجه می‌شود که $\varphi(-J)J = J\varphi(-J)$؛ از این‌رو $\varphi(-J)$ یک ماتریس قطری است. چون $\varphi(-J)$ برگشت است از لم (۱.۲) داریم که $\varphi(-J) = \pm I$ یا $\varphi(-J) = \pm J$. طبق لم (۴.۲)، از تشابه J و $-J$ می‌توان تشابه $\varphi(J) = J$ و $\varphi(-J)$ را نتیجه گرفت؛ بنابراین $\varphi(-J) = \pm J$.

از تساوی $JT = T(-J)$ نتیجه می‌شود

$$J\varphi(T) = \varphi(T)(\pm J) \tag{۲.۲}$$

چون $\varphi(T)^2 = \varphi(T^2) = I$، پس $\varphi(T)$ یک برگشت است. با توجه به لم (۱.۲) همه حالت‌های ممکن را برای $\varphi(T)$ در نظر می‌گیریم. از تشابه ماتریس‌های T و J، تشابه ماتریس‌های $\varphi(T)$ و $\varphi(J) = J$ را خواهیم داشت؛ بنابراین $\varphi(T) \neq \pm I$. اگر $\varphi(T) = \pm J$، آن‌گاه با استفاده از لم (۱۱.۲)،

$$kI = \varphi(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi(T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}T)\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) =$$
$$(\pm J)\begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 \\ 0 & \psi_2(z) \end{pmatrix}(\pm J)\begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 \\ 0 & \psi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^2(z) & 0 \\ 0 & \psi_2^2(z) \end{pmatrix}.$$

از رابطه قبل نتیجه می‌گیریم که $\psi_1(z^2) = \psi_2(z^2)$ برای هر $z \in \mathbb{C}^*$. چون ψ_1 و ψ_2 ضربی و z دلخواه است پس $\psi_1(z) = \psi_2(z)$ برای هر $z \in \mathbb{C}^*$، که این یک تناقض با فرض $\varphi(J) = J$ است.

اگر $\varphi(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ یا $\varphi(T) = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$، آن‌گاه از رابطه (۲.۲)، نتیجه می‌شود که $a = 0$؛ بنابراین حکم ثابت است. □

۳. اثبات قضیه اصلی

اثبات قضیه (۱.۱). از رابطه $\varphi(I)^{۲} = \varphi(I^{۲}) = \varphi(I)$، نتیجه می‌شود $\varphi(I) = I$. همچنین از تساوی

$$\varphi(J)^{۲} = \varphi(J^{۲}) = \varphi(I) = I$$

نتیجه می‌شود $\varphi(J)$ یک برگشت است. می دانیم طیف یک ماتریس برگشت زیرمجموعه‌ی $\{-۱, ۱\}$ است؛ بنابراین دو حالت زیر برای $\varphi(J)$ قابل تصور است.

حالت اول: $\varphi(J) = \pm I$؛

حالت دوم: $\varphi(J) = P^{-۱}JP$ که در آن $P \in \mathbb{GL}_{۲}(\mathbb{C})$. (یعنی $\varphi(J)$ با J متشابه است)

ابتدا فرض کنید $\varphi(J) = \pm I$. همچنین فرض کنید A عضو دلخواهی از $\mathbb{GL}_{۲}(\mathbb{C})$ است. فرم‌های مختلف کانونی ژوردان ماتریس A را در نظر می‌گیریم.

اگر $B_{۱} = \begin{pmatrix} z_{۱} & ۰ \\ ۰ & z_{۲} \end{pmatrix} \sim A$ که در آن $z_{۱}$ و $z_{۲}$ متعلق به $\mathbb{C}^*$ هستند، آن‌گاه ماتریس $P \in \mathbb{SL}_{۲}(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری‌که $A = P^{-۱}B_{۱}P$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های $U_{۱}, U_{۲}, U_{۳}, U_{۴} \in \mathbb{GL}_{۲}(\mathbb{C})$ وجود دارند به طوری‌که $P = U_{۱}U_{۲}U_{۳}U_{۴}$؛ از این‌رو

$$\varphi(A) = \varphi(P^{-۱}B_{۱}P) = \varphi(P)^{-۱}\varphi(B_{۱})\varphi(P) =$$
$$\varphi(U_{۴})\varphi(U_{۳})\varphi(U_{۲})\varphi(U_{۱})\varphi(B_{۱})\varphi(U_{۱})\varphi(U_{۲})\varphi(U_{۳})\varphi(U_{۴}).$$

طبق فرض $\varphi(J) = \pm I$ ؛ بنابراین از لم (۹.۲)، داریم $\varphi(U_i) = \pm I$، که در آن $i \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. از این رو

$$\varphi(A) = \varphi(B_{۱}) = \varphi(T\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۱} \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۲} \end{pmatrix}) = \varphi(T)\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۱} \end{pmatrix})\varphi(T)\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۲} \end{pmatrix}) =$$
$$\pm I\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۱} \end{pmatrix})(\pm I)\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۲} \end{pmatrix}) = \varphi(\left(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۱} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z_{۲} \end{pmatrix}\right)) = \varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & det(A) \end{pmatrix})$$

از بحث قبل نتیجه می شود که اگر $A \sim B_{۱}$، آن گاه

$$\varphi(A) = \varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & det(A) \end{pmatrix}) \tag{۱.۳}$$

اگر $B_{۲} = \begin{pmatrix} z & ۰ \\ ۱ & z \end{pmatrix} \sim A$ که در آن $z \in \mathbb{C}^*$، آنگاه داریم:

$$\varphi(A) = \varphi(B_{۲}) = \varphi(\begin{pmatrix} z & ۰ \\ ۱ & z \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} z & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix})\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ z^{-۱} & ۱ \end{pmatrix}). \tag{۲.۳}$$

فرض کنید $C = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ z^{-۱} & ۱ \end{pmatrix}$. ادعا می کنیم که $\varphi(C) = I$. ماتریس‌های C و $C^{۲}$ متشابه هستند؛ زیرا با فرض $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ \sqrt{۲}^{-۱} & \sqrt{۲}^{-۱} \end{pmatrix} \in \mathbb{SL}_{۲}(\mathbb{C})$ داریم $C^{۲} = Q^{-۱}CQ$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های $U_{۱}, U_{۲}, U_{۳}, U_{۴} \in \mathbb{GL}_{۲}(\mathbb{C})$ وجود دارند به طوری که $Q = U_{۱}U_{۲}U_{۳}U_{۴}$. از آنجا که $\varphi(U_i) = \pm I$ که در آن $i \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$؛ پس $\varphi(C^{۲}) = \varphi(C)$؛ درنتیجه $\varphi(C)\varphi(C) = \varphi(C)$. چون $\varphi(C) \in \mathbb{GL}_{۲}(\mathbb{C})$ پس $\varphi(C) = I$؛ بنابراین ادعا ثابت می شود. اکنون از رابطه (۲.۳)، داریم:

$$\varphi(A) = \varphi(zI)\varphi(C) = \varphi(zI) = \varphi(T\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix})$$

$$= \pm I\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix})(\pm I)\varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & z \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & det(A) \end{pmatrix}). \tag{۳.۳}$$

حال نگاشت $i : \mathbb{C}^* \cong \mathbb{GL}_1(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ را با ضابطه $i(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ به ازای هر $z \in \mathbb{C}^*$ در نظر می‌گیریم؛ در این صورت نگاشت $\varphi' : \mathbb{C}^* \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ با ضابطه $\varphi'(z) = \varphi \circ i(z)$ همریختی پیوسته‌ی گروهی است. طبق لم (۸.۲)، دو حالت زیر ممکن است رخ دهند.

۱. $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi \circ i(z) = \varphi'(z) = P^{-1}\begin{pmatrix} z^{k_1}|z|^{t_1}e^{i\alpha_1 ln|z|} & 0 \\ 0 & z^{k_2}|z|^{t_2}e^{i\alpha_2 ln|z|} \end{pmatrix}P$،

۲. $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) = \varphi \circ i(z) = \varphi'(z) = z^k|z|^t e^{i\alpha ln|z|}.P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda ln|z| & 1 \end{pmatrix}P$.

از روابط (۱.۳) و (۳.۳) و برابری‌های قبل، حالت‌های اول و دوم قضیه اصلی (۱.۱) نتیجه می‌شوند.

در ادامه‌ی برهان حالت دوم را در نظر می‌گیریم. بنابراین، فرض کنید $\varphi(J) \sim J$؛ از این رو ماتریس $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ وجود دارد به طوری که $\varphi(J) = P^{-1}JP$. چون نگاشت $\varphi' : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ با ضابطه

$$\varphi'(A) = P\varphi(A)P^{-1}$$

همریختی پیوسته‌ی گروهی است، بدون این که به کلیت برهان خللی وارد شود می توان فرض نمود که $\varphi(J) = J$. اگر $\lambda \in \mathbb{C}^*$ وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(\lambda I)$ مضرب ماتریس واحد نباشد آن گاه با استفاده از نتیجه (۶.۲) و لم (۱۰.۲) حالت اول از قضیه اصلی به دست می آید؛ بنابراین در ادامه برهان فرض می کنیم $\varphi(\lambda I)$ به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}^*$ مضرب ماتریس واحد است. چون $\varphi(J) = J$ طبق لم (۱۲.۲)،

$$\varphi(T) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن $b \in \mathbb{C}^*$. فرض کنید $b = re^{i\theta}$؛ در این‌صورت $b^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$ که در آن $r > 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$. اکنون نگاشت $\varphi'' : \mathbb{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ با ضابطه

$$\varphi''(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}\varphi(A)\begin{pmatrix} \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم؛ در این‌صورت داریم:

$$\varphi''(T)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0\\ 0 & \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & re^{i\theta}\\ r^{-1}e^{-i\theta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}}\end{pmatrix}=T$$

همچنین داریم:

$$\varphi''(J)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}} & 0\\ 0 & \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{i\theta}{2}}\end{pmatrix}=J$$

به علاوه φ'' مضارب ماتریس واحد را به مضارب ماتریس واحد تصویر می‌کند. از بحث بالا نتیجه می‌شود که بدون از دست دادن کلیت استدلال می‌توان فرض نمود که نگاشت $\varphi:\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ همریختی پیوسته‌ی گروهی است به طوری‌که $\varphi(J)=J$، $\varphi(T)=T$ و φ مضارب ماتریس واحد را به مضارب ماتریس واحد تصویر می‌کند. همچنین طبق لم (۱۱.۲)، همریختی‌های $\alpha,\beta:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ وجود دارند به طوری‌که

$$\varphi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}\alpha(z) & 0\\ 0 & \beta(z)\end{pmatrix}=\alpha(z)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma(z)\end{pmatrix},$$

که در آن $\gamma(z)=\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$. چون $\varphi(I)=I$ و $\varphi(J)=J$، پس $\alpha(-1)=\alpha(1)=\gamma(1)=1$ و $\gamma(-1)=-1$.

اکنون فرض کنید z_1 و z_2 عضوهای دلخواهی از $\mathbb{C}^*$ باشند؛ در این‌صورت

$$\varphi(\begin{pmatrix}z_1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix})=\varphi(T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_1\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix})=\varphi(T)\varphi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_1\end{pmatrix})\varphi(T)\varphi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & z_2\end{pmatrix})$$

$$=T\alpha(z_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma(z_1)\end{pmatrix})T\alpha(z_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma(z_2)\end{pmatrix})=\alpha(z_1z_2)\begin{pmatrix}\gamma(z_1) & 0\\ 0 & \gamma(z_2)\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

ادعا می‌کنیم که $\varphi(S)=\pm S$ که در آن $S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. از تساوی $ST=TS$ نتیجه می‌شود $\varphi(S)\varphi(T)=\varphi(T)\varphi(S)$. طبق فرض داریم $\varphi(T)=T$ ، پس $\varphi(S)T=T\varphi(S)$. از طرفی

$$\varphi(S)^{۲} = \varphi(S^{۲}) = \varphi(I) = I$$

پس $\varphi(S)$ یک برگشت است. با استفاده از لم (۱.۲)، همه حالت‌های ممکن برای $\varphi(S)$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی ملاحظه می‌شود که $\varphi(S) = \pm S$.

حال نشان می دهیم φ ماتریس‌هایی به‌فرم $\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix}$ را به ماتریس‌هایی به‌فرم $\begin{pmatrix} a'+۲b' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ تصویر می‌کند؛ به‌عبارت دیگر نشان می‌دهیم

$$\varphi(\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a'+۲b' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \qquad (۵.۳)$$

که در آن $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ و دترمینان ماتریس‌های مذکور مخالف صفر است.

از تساوی $S\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix} S$ و $\varphi(S) = \pm S$ نتیجه می‌شود

$$\pm S\varphi(\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix})(\pm S)$$

از تساوی قبل نتیجه می‌شود $\varphi(\begin{pmatrix} a+۲b & b \\ b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a'+۲b' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ که در آن $a', b' \in \mathbb{C}$.

به کمک معادله (۴.۳) نشان می‌دهیم

$$\gamma(\frac{z - ۱ + \sqrt{۲z^{۲} + ۲}}{z + ۱}) = \frac{\gamma(z) - ۱ + \sqrt{۲\gamma(z)^{۲} + ۲}}{\gamma(z) + ۱}, \qquad (۶.۳)$$

به ازای هر $z \in \mathbb{C}^*\backslash\{-۱\}$. فرض کنید $z, w \in \mathbb{C}^*$. از تساوی

$$\begin{pmatrix} w & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} z & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} w & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{۲}\frac{z+۱}{۲} & w\frac{z-۱}{۲} \\ w\frac{z-۱}{۲} & \frac{z+۱}{۲} \end{pmatrix}$$

نتیجه می‌شود

$$\varphi(\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\varphi(S)\varphi(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\varphi(S)\varphi(\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} w^2\frac{z+1}{2} & w\frac{z-1}{2} \\ w\frac{z-1}{2} & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix}).$$

از این رو

$$\alpha(w)\begin{pmatrix} \gamma(w) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\pm S)\alpha(z)\begin{pmatrix} \gamma(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\pm S)\alpha(w)\begin{pmatrix} \gamma(w) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} w^2\frac{z+1}{2} & w\frac{z-1}{2} \\ w\frac{z-1}{2} & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix}).$$

بنابراین

$$\alpha(w^2z)\begin{pmatrix} \gamma(w)^2\frac{\gamma(z)+1}{2} & \gamma(w)\frac{\gamma(z)-1}{2} \\ \gamma(w)\frac{\gamma(z)-1}{2} & \frac{\gamma(z)+1}{2} \end{pmatrix} = \varphi(\begin{pmatrix} w^2\frac{z+1}{2} & w\frac{z-1}{2} \\ w\frac{z-1}{2} & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix}).$$

اگر ماتریس $\begin{pmatrix} w^2\dfrac{z+1}{2} & w\dfrac{z-1}{2} \\ w\dfrac{z-1}{2} & \dfrac{z+1}{2} \end{pmatrix}$ را به فرم $\begin{pmatrix} a+2b & wb \\ b & a \end{pmatrix}$ تبدیل کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$w^2\frac{z+1}{2} = \frac{z+1}{2} + 2w\frac{z-1}{2}.$$

جواب‌های این معادله‌ی درجه‌ی دوم عبارت‌اند از:

$$w = \frac{z-1\pm\sqrt{2z^2+2}}{z+1}.$$

به طریق مشابه ملاحظه می‌شود

$$\gamma(w) = \frac{\gamma(z)-1\pm\sqrt{2\gamma(z)^2+2}}{\gamma(z)+1}.$$

چون $\gamma(1) = 1$، پس حالت منفی رخ نمی‌دهد. طبق فرض نگاشت φ همریختی پیوسته‌ی گروهی است؛ بنابراین نگاشت $\gamma : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ یک همریختی پیوسته‌ی گروهی است که در معادله (۶.۳) صدق می‌کند. طبق لم (۳.۲)، فرم عمومی γ به‌صورت زیر است:

$$\gamma(z) = z^k|z|^t e^{ia\ln|z|}.$$

اکنون نشان می‌دهیم برای γ چهار حالت زیر ممکن است.

حالت اول. $k = 1$، $t = 0$، $a = 0$، یعنی $\gamma(z) = z$؛

حالت دوم. $k=1$، $t=-2$، $a=0$، یعنی $\gamma(z)=z.|z|^{-2}=(\bar{z})^{-1}$؛
حالت سوم. $k=-1$، $t=0$، $a=0$، یعنی $\gamma(z)=z^{-1}$؛
حالت چهارم. $k=-1$، $t=2$، $a=0$، یعنی $\gamma(z)=z^{-1}.|z|^{2}=\bar{z}$.

چون معادله (۶.۳) به ازای هر $z\in\mathbb{C}^*\backslash\{-1\}$ برقرار است با فرض $|z|=1$ داریم $\gamma(z)=z^k$ و

$$\left(\frac{z-1+\sqrt{2z^2+2}}{z+1}\right)^k=\frac{z^k-1+\sqrt{2z^{2k}+2}}{z^k+1}.$$

بدیهی است که $k\neq 0$. اگر $k\neq\pm1$، از معادله قبل با فرض $z=e^{\frac{i\pi}{k}}$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین

$$\gamma(z)=z|z|^te^{ia\ln|z|}$$

یا

$$\gamma(z)=z^{-1}|z|^te^{ia\ln|z|}.$$

اگر $\gamma(z)=z|z|^te^{ia\ln|z|}$، آن‌گاه از معادله (۶.۳) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{z-1+\sqrt{2z^2+2}}{z+1}\right)\left|\frac{z-1+\sqrt{2z^2+2}}{z+1}\right|^t e^{ia\ln\left|\frac{z-1+\sqrt{2z^2+2}}{z+1}\right|}=\frac{z.|z|^te^{ia\ln|z|}-1+\sqrt{2(z.|z|^te^{ia\ln|z|})^2+2}}{z.|z|^te^{ia\ln|z|}+1}$$

از این‌رو قسمت‌های حقیقی طرفین تساوی قبل با هم برابر هستند؛ یعنی

$$\left(\frac{x-1+\sqrt{2x^2+2}}{x+1}\right)\left|\frac{x-1+\sqrt{2x^2+2}}{x+1}\right|^t\cos(a\ln|\frac{x-1+\sqrt{2x^2+2}}{x+1}|)=\frac{x.|x|^t\cos(a\ln|x|)-1+\sqrt{2(x.|x|^t\cos(a\ln|x|))^2+2}}{x.|x|^t\cos(a\ln|x|)+1}$$

که در آن $x=Re(z)$. حد طرفین تساوی قبل را زمانی که $x\to+\infty$ در نظر می‌گیریم. به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^t\cos(a\ln((1+\sqrt{2}))=\begin{cases}1+\sqrt{2} & ,\ t>-1\\ \text{موجود نیست} & ,\ t=-1\\ -1+\sqrt{2} & ,\ t<-1\end{cases}$$

از تساوی قبل نتیجه می‌شود که اگر $t > -1$ آن‌گاه $t = 0$ و $a = 0$؛ اگر $t = -1$ آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود و اگر $t < -1$ آن‌گاه $t = -2$ و $a = 0$؛ بنابراین در حالت $k = 1$ داریم $\gamma(z) = z$ یا $\gamma(z) = z|z|^{-2} = (\bar{z})^{-1}$. به طریق مشابه، اگر $k = -1$ آن‌گاه $\gamma(z) = z^{-1}$ یا $\gamma(z) = z^{-1}|z|^{2} = \bar{z}$.

اکنون تمامی حالت‌های ممکن را برای γ به‌صورت مجزا در نظر می‌گیریم.

حالت اول. اگر $\gamma(z) = z$ آن‌گاه

$$\varphi(\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}) = \alpha(z^2 - w^2)\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

که در آن $z, w \in \mathbb{C}$؛ زیرا با استفاده از لم (۴.۳) داریم:

$$\varphi(\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}) = \varphi(S\begin{pmatrix} z+w & 0 \\ 0 & z-w \end{pmatrix}S) = (\pm S)\alpha(z^2 - w^2)\begin{pmatrix} \gamma(z+w) & 0 \\ 0 & \gamma(z-w) \end{pmatrix}(\pm S) =$$
$$\alpha(z^2 - w^2)S\begin{pmatrix} z+w & 0 \\ 0 & z-w \end{pmatrix}S = \alpha(z^2 - w^2)\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix}.$$

همچنین

$$\varphi(\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & z_2 \end{pmatrix}) = \alpha(z_1 z_2 - w^2)\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & z_2 \end{pmatrix} \qquad (8.3)$$

که در آن $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ و $w \in \mathbb{C}$؛ زیرا با فرض $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ که در آن $r_1, r_2 > 0$ و $-\pi < \theta_1, \theta_1 \leq \pi$، از تساوی

$$\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 e^{i\theta_2} & w\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}e^{i\frac{(\theta_2-\theta_1)}{2}} \\ w\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}e^{i\frac{(\theta_2-\theta_1)}{2}} & r_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

رابطه‌های (۴.۳) و (۷.۳)، رابطه‌ی (۸.۳) نتیجه می‌شود.

حال به کمک رابطه‌ی (۸.۳) نشان می‌دهیم که به ازای هر $z_1 \in \mathbb{C}^*$ و هر $w \in \mathbb{C}$ رابطه‌ی زیر برقرار

است.

$$\varphi(\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}) = \alpha(-w^2)\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & 0 \end{pmatrix} \tag{۹.۳}$$

از تساوی $S\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و معادله (۸.۳) نتیجه می‌شود که $\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. از این‌رو با فرض $t = \frac{z_1}{w}$ و تساوی زیر

$$\begin{pmatrix} z_1 & w \\ w & 0 \end{pmatrix} = (wI)\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (wI)\begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}.$$

معادله (۹.۳) نتیجه می‌شود.

همچنین به ازای هر $z_2 \in \mathbb{C}^*$، از تساوی $T\begin{pmatrix} z_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}$ و معادله (۹.۳)، داریم:

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}. \tag{۱۰.۳}$$

از این‌رو از معادله (۱۰.۳)، رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}).\varphi(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}.T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix}. \tag{۱۱.۳}$$

به‌علاوه داریم:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

در نتیجه

$$\varphi(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & 1 \end{pmatrix})\varphi(-J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix}(-J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{۱۲.۳}$$

به ازای هر $z_3 \in \mathbb{C}^*$ داریم:

$$\varphi(\begin{pmatrix} 0 & z_3 \\ \frac{1}{z_3} & 0 \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} z_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_3} \end{pmatrix})\varphi(T) = \alpha(1)\begin{pmatrix} \gamma(z_3) & 0 \\ 0 & \gamma(\frac{1}{z_3}) \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} 0 & z_3 \\ \frac{1}{z_3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۳.۳}$$

حال نشان می‌دهیم φ هر ماتریس برگشت را به خودش تصویر می‌کند. با توجه به آنچه که تاکنون ثابت شد داریم:

$$\varphi(I) = I, \quad \varphi(-I) = -I, \quad \varphi(J) = J, \quad \varphi(-J) = -J.$$

با توجه به لم (۱.۲)، کافی است دو حالت $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$ را در نظر بگیریم. برای حالت اول داریم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{-1}{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

از روابط (۱۲.۳) و (۱۳.۳) نتیجه می‌شود

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix})\varphi(\begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{-1}{b} & 0 \end{pmatrix})\varphi(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}) =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ \frac{-1}{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$$

به طریق کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}) = \varphi(\begin{pmatrix} -1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\varphi(\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{c} \\ -c & 0 \end{pmatrix})\varphi(\begin{pmatrix} -1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

بنابراین هر ماتریسِ برگشت تحت نگاشت φ به یک ماتریسِ برگشت تصویر می‌شود.

اکنون فرض کنید $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ دلخواه باشد. ماتریس A را می‌توان به‌فرم

$$A = (k.I)B,$$

نمایش داد که در آن $k = \sqrt{detA}$ و $detB = 1$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های

$$U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$$

وجود دارند به طوری‌که $B = U_1U_2U_3U_4$؛ در این‌صورت خواهیم داشت

$$\varphi(A) = \varphi(kI)\varphi(U_1U_2U_3U_4) = \varphi(kI)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4) =$$
$$\alpha(detA)(kI)U_1U_2U_3U_4 = \alpha(detA)(kI)B = \alpha(detA)A.$$

با توجه به اینکه $\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی پیوسته‌ی گروهی است و نگاشت φ با نگاشتی به‌صورت $P\varphi(.)P^{-1}$ تعویض شده است، با استفاده از لم (۳.۲)، فرم عمومی φ در این حالت عبارت است از:

$$\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}AP$$

که در $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$، k یک عدد صحیح، t و a اعدادحقیقی هستند.

به‌طریق مشابه برهان‌های حالت‌های دوم، سوم و چهارم را خواهیم داشت که به دلیل تکراری بودن فرآیند برهان، از بیان جزئیات آن‌ها صرف‌نظر می‌شود.

حالت دوم. اگر $\gamma(z) = (\overline{z})^{-1}$، آن‌گاه نشان می‌دهیم $P \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$، عدد صحیح k، اعداد حقیقی t و a وجود دارند به طوری‌که

$$\varphi(A) = (det(A))^k|det(A)|^t e^{ialn|det(A)|} \quad P^{-1}((\overline{A})^{-1})^t P.$$

فرض کنید $\gamma(z) = (\overline{z})^{-1}$. دقیقاً مشابه حالت اول نتیجه می‌شود که تصویر هر ماتریس برگشت تحت φ برابر با ترانهاده‌ی وارونِ مزدوج‌اش است. به عبارت دیگر اگر U یک ماتریس برگشت باشد، آن‌گاه

$$\varphi(U) = ((\overline{U})^{-1})^t.$$

اکنون فرض کنید $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ دلخواه باشد. ماتریس A را می‌توان به‌فرم

$$A = (k.I)B,$$

نمایش داد که در آن $k = \sqrt{detA}$ و $detB = 1$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های

$$U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$$

وجود دارند به طوری‌که $B = U_1U_2U_3U_4$؛ در این‌صورت خواهیم داشت

$$\begin{gathered}\varphi(A) = \varphi(kI)\varphi(U_1U_2U_3U_4) = \varphi(kI)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4) = \\ \alpha(detA)((\overline{k})^{-1}I)((\overline{U_1})^{-1})^t((\overline{U_2})^{-1})^t((\overline{U_3})^{-1})^t((\overline{U_4})^{-1})^t = \\ \alpha(detA)((\overline{k})^{-1}I)((\overline{U_4})^{-1}(\overline{U_3})^{-1}(\overline{U_2})^{-1}(\overline{U_1})^{-1})^t = \alpha(detA)((\overline{k})^{-1}I)((\overline{U_1U_2U_3U_4})^{-1})^t = \\ \alpha(detA)((\overline{k})^{-1}I)((\overline{B})^{-1})^t = \alpha(detA)((\overline{A})^{-1})^t.\end{gathered}$$

با توجه به اینکه $\alpha : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ همریختی پیوسته‌ی گروهی است و نگاشت φ با نگاشتی به‌صورت $P\varphi(.)P^{-1}$ تعویض شده است به کمک لم (۳.۲)، ادعا ثابت است.

حالت سوم. اگر $\gamma(z) = z^{-1}$، آن‌گاه تصویر هر ماتریس برگشت تحت φ برابر با ترانهاده‌ی وارون‌اش است. به عبارت دیگر اگر U یک ماتریس برگشت باشد، آن‌گاه

$$\varphi(U) = ((U)^{-1})^t.$$

اکنون فرض کنید $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ دلخواه باشد. ماتریس A را می‌توان به‌فرم

$$A = (k.I)B,$$

نمایش داد که در آن $k = \sqrt{detA}$ و $detB = 1$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های

$$U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$$

وجود دارند به طوری‌که $B = U_1U_2U_3U_4$؛ در این‌صورت خواهیم داشت

$$\varphi(A)=\varphi(kI)\varphi(U_1U_2U_3U_4)=\varphi(kI)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)=$$
$$\alpha(detA)(k^{-1}I)(U_1^{-1})^t(U_2^{-1})^t(U_3^{-1})^t(U_4^{-1})^t=\alpha(detA)(k^{-1}I)(U_4^{-1}U_3^{-1}U_2^{-1}U_1^{-1})^t=$$
$$\alpha(detA)(k^{-1}I)((U_1U_2U_3U_4)^{-1})^t=\alpha(detA)(k^{-1}I)(B^{-1})^t=\alpha(detA)(A^{-1})^t.$$

با توجه به اینکه $\alpha:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ همریختی پیوسته‌ی گروهی است و نگاشت φ با نگاشتی به‌صورت $P\varphi(.)P^{-1}$ تعویض شده است طبق لم (۳.۲)، فرم عمومی φ در این حالت عبارت است از:

$$\varphi(A)=(det(A))^k|det(A)|^te^{ialn|det(A)|}\quad P^{-1}(A^{-1})^tP.$$

که در $P\in\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$، k یک عدد صحیح، t و a اعدادحقیقی هستند.

حالت چهارم. اگر $\gamma(z)=\bar{z}$، آنگاه تصویر هر ماتریس برگشت تحت φ برابر با مزدوج‌اش است. به عبارت دیگر اگر U یک ماتریس برگشت باشد، آنگاه

$$\varphi(U)=\overline{U}.$$

فرض کنید $A\in\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$ دلخواه باشد. ماتریس A را می‌توان به‌فرم

$$A=(k.I)B,$$

نمایش داد که در آن $k=\sqrt{detA}$ و $detB=1$. طبق لم (۲.۲)، برگشت‌های

$$U_1,U_2,U_3,U_4\in\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$$

وجود دارند به طوری‌که $B=U_1U_2U_3U_4$؛ در این‌صورت خواهیم داشت

$$\varphi(A)=\varphi(kI)\varphi(U_1U_2U_3U_4)=\varphi(kI)\varphi(U_1)\varphi(U_2)\varphi(U_3)\varphi(U_4)=$$
$$\alpha(detA)(\bar{k}I)\overline{U_1U_2U_3U_4}=\alpha(detA)(\bar{k}I)\overline{U_1U_2U_3U_4}=\alpha(detA)(\bar{k}I)\overline{B}=\alpha(detA)\overline{A}.$$

بنابراین فرم عمومی φ در این حالت عبارت است از:

$$\varphi(A)=(det(A))^k|det(A)|^te^{ialn|det(A)|}\quad P^{-1}\overline{A}P.$$

که در $P\in\mathbb{GL}_2(\mathbb{C})$، k یک عدد صحیح، t و a اعدادحقیقی هستند.

اثبات نتیجه (۲.۱). طبق فرض φ همریختی یک به یک است، پس در فرم‌های قضیه‌ی (۱.۱)، عدد $det(A)$ را نخواهیم داشت. شرط لازم برای حذف $det(A)$ در فرم‌های موجود آن است که

$$k = k_۱ = k_۲ = t = t_۱ = t_۲ = a = a_۱ = a_۲ = \lambda = ۰.$$

مجدداً از یک به یک بودن φ نتیجه می‌شود که حالت‌های اول و دوم قضیه‌ی (۱.۱)، امکانپذیر نمی‌باشند و حکم ثابت است.

مراجع

[۱] J. Aczél and J. Dhombres، *Functional Equations in Several Variables*، Encyclopedia Math. Appl. ،۳۱ Cambridge Univ. Press، Cambridge، .۱۹۸۹

[۲] R. Bhatia، *Matrix Analysis*، New York، Springer-Verlag، .۱۹۹۷

[۳] W.H. Gustafson، P.R. Halmos and H. Radjavi، Products of involutions، *Linear Algebra and its Applications*، ۱۳ ،(۱۹۷۶) .۱۶۲-۱۵۷

[۴] K. Hoffman and R.A. Kunze، *Linear Algebra*، Prentice-Hall، .۱۹۷۱

[۵] B. Kuzma ، Jordan triple product homomorphisms، *Monatshefte für Mathematik*، ۱۴۹ ،(۲۰۰۶) .۱۲۸-۱۱۹

[۶] L. Molnár، On isomorphisms of standard operator algebras، *Studia Mathematica*، ۱۴۲ ،(۲۰۰۰) .۳۰۲-۲۹۵

[۷] L. Molnár، Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups، *Linear Algebra and its Applications*، ۴۳۹ ،(۲۰۱۳) .۳۵۳۱-۳۵۱۸

[۸] M. Omladi�c، H. Radjavi and P. Šemrl، Homomorphisms from $\mathbb{C}^*$ into $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$، *Publicationes Mathematicae Debrecen*، ۵۵ ،(۱۹۹۹) .۴۸۶-۴۷۹

[۹] P.K. Sahoo and P. Kannappan، *Introduction to Functional Equations*، CRC Press، Boca Raton، .۲۰۱۱

[۱۰] A. Taghavi and S. Salehi، Continuous maps preserving Jordan triple products from $\mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$ into $\mathbb{C}^*$، *Indagationes Mathematicae*، ۲۸ ،(۲۰۱۷) .۱۲۳۹-۱۲۳۳

[۱۱] A. Taghavi and S. Salehi، Continuous maps preserving Jordan triple products from $\mathbb{U}_n$ to $\mathbb{D}_m$، *Indagationes Mathematicae*، ۳۰ ،(۲۰۱۹) .۱۶۴-۱۵۷

[۱۲] A. Taghavi and S. Salehi، Continuous maps preserving Jordan triple products from $\mathbb{GL}_۱$ to $\mathbb{GL}_۲$ and $\mathbb{GL}_۳$، *Linear and Multilinear Algebra*، ۶۹ ،(۲۰۲۱) .۲۲۳-۲۰۸