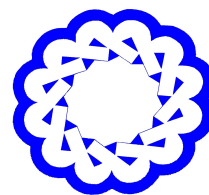


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

روش کریلف بلوکی تو در تو بر پایه GCR برای حل معادله سیلوستر

آزیتا تاج‌الدینی*، نجمه عزیزی زاده^آ، مینا جمشیدی^ب

^آبخش ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
^ب دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان، کرمان، ایران

چکیده

در این مقاله روش مانده مزدوج تعمیم یافته بلوکی برای حل معادله سیلوستر مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش شامل دو تکرار بیرونی و درونی است، در تکرار درونی از روش مانده مینیمال تعمیم یافته بلوکی و در تکرار بیرونی از مانده مزدوج تعمیم یافته استفاده می‌شود. در تکرار درونی با حل یک دستگاه معادلات خطی با سمت راست چندگانه یک بردار جستجوی جدید به دست می‌آید، از تکرار بیرونی برای محاسبه تقریب بهینه روی یک مجموعه داده شده از بردارهای جستجو استفاده می‌شود. در اینجا در تکرار درونی از روش مانده مینیمال پیش شرط سازی شده برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده می‌شود که باعث سریعتر شدن سرعت همگرایی می‌شود. در پایان مثال‌های عددی کارایی الگوریتم پیشنهادی و نوع ترکیب پیش شرط ساز با آن در مقایسه با بعضی روش‌ها نشان می‌دهند.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۱ مرداد ۱۳۹۸

پذیرفته شده: ۲۸ مهر ۱۳۹۸

دسترسی آنلاین: ۱۰ آذر ۱۳۹۸

ادیتور رابط: فاطمه پنجه‌علی‌بیک

کلمات کلیدی:

مانده مینیمال تعمیم یافته

بلوکی، مانده مزدوج

تعمیم یافته بلوکی، پیش

شرط ساز.

۱. مقدمه

در این مقاله به حل معادله ماتریسی سیلوستر

$$AX + XB = C, \quad (1.1)$$

پرداخته می‌شود که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ و $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ با $p \ll n$ در نظر گرفته شده است. این معادله ماتریسی نقش اساسی در خیلی از مسائل مانند نظریه کنترل و ارتباطات، پردازش سیگنال، بازسازی و پردازش تصویر، فیلترینگ و مساله کاهش مدل دارد [۶، ۱۳، ۱۵]. شرط لازم و کافی برای وجود جواب یکتا برای معادله (۱.۱) این است که $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0$ برای تمام $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, p$ که $\lambda_k(E)$ ، k -امین مقدار ویژه E است. در سراسر این مقاله فرض بر این است که این شرط برقرار است.

به خاطر اهمیت و نقش این معادله در کاربردهای عملی، روش‌های حل زیادی برای معادله (۱.۱) وجود دارد. اگر اندازه ماتریس‌های ضرایب A و B کوچک باشند، مشهورترین روش عددی برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱)، الگوریتم هسنبرگ-شور^۱ است [۱۰]. در این روش ماتریس A به شکل بالا هسنبرگی و B به شکل شور حقیقی تبدیل می‌شود. در حقیقت، روش هسنبرگ-شور اصلاح کارآمدی از روش بارتلز-استوارت^۲ است [۳]. زمانی که ماتریس‌های A و B تنگ و بزرگ باشند، از روش‌های تکراری برای حل این نوع معادلات استفاده می‌شود. در سال‌های گذشته، چندین روش تصویری بر پایه روش‌های زیرفضای کرلیف پیشنهاد شده است [۱، ۲، ۴، ۵، ۹، ۱۴، ۲۰]. ایده اصلی این روش‌ها این است که پایه مناسبی برای زیرفضای کرلیف ساخته می‌شود و سپس مسئله بزرگتر روی یک مسئله کوچکتر تصویر می‌گردد. از بین این روش‌ها، روش‌های زیرفضای کرلیف بلوکی مورد استقبال

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: atajadini@uk.ac.ir (آزیتا تاج الدینی)، nazizizadeh@yahoo.com (نجمه عزیزی زاده)، m.jamshidi@kgut.ac.ir (مینا جمشیدی).

<http://doi.org/10.22072/wala.2019.111807.1239>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

¹Hessenberg-Schur

²Bartels-Stewart

خوبی قرار گرفته‌اند. به دلیل اینکه زیرفضای کریلف بلوکی، فضای جستجوی بزرگتری دارد که شامل همه بردارهای زیرفضای کریلف تولید شده با هر دستگاه خطی که به صورت تکی ظاهر می‌شود، است [۱۱].

فُاک و وندرورست^۳ [۲۱]، روش GMRESR را برای حل دستگاه معادلات خطی ارائه کردند که نوعی از یک روش GMRES تو در تو است. روش GMRESR شامل تکرار های داخلی و خارجی است. تکرار خارجی، روش GCR است که برای محاسبه تقریب بهینه روی مجموعه بردارهای جستجو که مانده را مینیمم می‌کند، بکار می‌رود. تکرار داخلی GMRES است که یک بردار جستجو جدید را با به طور تقریبی حل کردن معادله مانده، محاسبه می‌کند. این بردار جستجو توسط الگوریتم خارجی برای محاسبه تقریب جدید بکار می‌رود. اگرچه بهینگی تقریب روی فضای جستجو بردارها در روش GMRES داخلی نادیده گرفته می‌شود، این منجر به اصلاح بهینه جواب در الگوریتم خارجی می‌گردد. بنابراین ارائه روشی که رابطه‌های تعامد را در GCR و GMRES داخلی حفظ کند، منطقی و ارزشمند است. در سال ۱۹۹۶، اشتورلر^۴ [۷] روش مانده مزدوج تعمیم یافته را با متعامد سازی داخلی ضمنی (GCRO) برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ پیشنهاد کرد. GCRO یک روش کریلف تو در تو بر پایه روش مانده مزدوج تعمیم یافته (GCR) است که از روش GMRES به عنوان تکرار داخلی استفاده می‌شود. در این روش هنگامیکه تعداد تکرارهای بیرونی افزایش پیدا می‌کند، تعداد ضرب ماتریس- بردار زیاد می‌شود و این الگوریتم پر هزینه می‌شود، از این رو، در [۸] الگوریتم GCROT مطرح شد که در حقیقت تکرارهای بیرونی را به نوعی برش می‌زند. همچنین در [۱۷، ۱۸] به ترتیب روش های $BGCROT(m, k)$ و $DBGCROT(m, k)$ برای حل دستگاه های معادلات خطی با سمت راست چندگانه پیشنهاد شد. روش $BGCROT(m, k)$ تعمیمی از روش GCROT است. در روش $DBGCROT(m, k)$ روش تقلیل برداری را با روش $BGCROT(m, k)$ ترکیب کردند، این باعث شد سرعت همگرایی روش بالا رود.

در این مقاله، روش GCRO بلوکی را برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) تعمیم می‌دهیم. این روش شامل دو تکرار بیرونی و درونی است. در تکرار درونی از روش GMRES بلوکی برای حل یک دستگاه معادلات خطی با سمت راست چندگانه استفاده کرده ایم که می‌توان حالت پیش شرط سازی شده آن را نیز در نظر گرفت، و تکرار بیرونی بر پایه روش GCRO است. این روش و ترکیب پیش شرط ساز با تکرار درونی را روش BGCR و FBGCR می‌نامیم. رفتار این روش را با روش های BGMRES

³Vuik and Van der Vorst

⁴Sturler

[۱۱]، [۱۲] BIBigstab، و [۱۴] NSCG مقایسه کرده ایم. در واقع نشان داده ایم که برای m های کوچک این دو روش در مقایسه با بعضی از روش‌ها از کارایی خوبی برخوردار هستند. همچنین نرم مانده ناصعودی است.

در این مقاله از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌شود. ضرب داخلی دو ماتریس X و Y به صورت $\langle X, Y \rangle_F = \text{trace}(X^T Y)$ تعریف می‌شود، که در آن $\text{trace}(Z)$ نشان دهنده رد ماتریس مربعی Z است و X^T ، ترانپوز ماتریس X است. نرم متناظر با این ضرب داخلی، نرم فروبنیوس $\|\cdot\|_F$ می‌باشد. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، روش GMRES بلوکی را برای حل معادله سیلوستر (۱.۱) به طور مختصر مرور کرده ایم. در بخش ۳، یک روش کریلف تو در تو بر پایه روش مانده مزدوج تعمیم یافته (BGCRO) برای حل معادله سیلوستر معرفی کرده ایم. همچنین الگوریتم BGCRO را با پیش شرط ساز انعطاف پذیر نیز بیان کرده ایم. در بخش ۴، مثال‌های عددی را آورده ایم برای اینکه کارایی روش پیشنهادی را نشان دهیم.

۲. روش GMRES بلوکی

قبل از این که روش GMRES بلوکی را توصیف کنیم ابتدا به تعریف زیر فضای کریلف بلوکی می‌پردازیم:

تعریف ۱.۲. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ، m امین زیر فضای کریلف بلوکی با $\mathcal{K}_m(A, V)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m(A, V) &= \text{range}[V, AV, \dots, A^{m-1}V] \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^m A^{j-1} V \Omega_j \mid \Omega_j \in \mathbb{R}^{p \times p}, j = 1, 2, \dots, p \right\}. \end{aligned}$$

اکنون، با استفاده از عملگر خطی

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$\mathcal{A}(X) = AX + XB$$

که در [۱۱] معرفی شده است، زیر فضای کریلف بلوکی $\mathcal{K}_m(\mathcal{A}, V)$ تولید شده توسط بلوک‌های $V, \mathcal{A}(V), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(V)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathcal{K}_m(\mathcal{A}, V) = \text{range}[V, \mathcal{A}(V), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(V)],$$

که در آن $\mathcal{A}^k(V) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}(V))$.

لم زیر نشان می‌دهد زیر فضای کریلف بلوکی ساخته شده با ماتریس A و عملگر خطی \mathcal{A} یکسان هستند.

لم ۲.۲. [۱۱] فرض کنید X_0 یک حدس اولیه باشد و $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ مانده متناظر با آن باشد. همچنین فرض کنید R_0 رتبه کامل باشد. آنگاه

$$\mathcal{K}_m(\mathcal{A}, R_0) = \mathcal{K}_m(A, R_0).$$

در ادامه روش GMRES بلوکی برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) را توضیح می‌دهیم. ابتدا یک پایه یکا متعامد با استفاده از فرایند آرنولدی بلوکی برای زیر فضای کریلف بلوکی $\mathcal{K}_m(A, R_0)$ می‌سازیم. این الگوریتم به صورت زیر داده شده است:

الگوریتم ۱ فرایند آرنولدی بلوکی

- ۱: ورودی: ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, حدس اولیه $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ و عدد صحیح m .
- ۲: خروجی: جواب تقریبی X_m .
- ۳: $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ را محاسبه کن.
- ۴: تجزیه QR کاهش یافته R_0 را محاسبه کن: $[V_1, \Lambda_1] = qr(R_0)$.
- ۵: برای $j = 1, 2, \dots, m$ گام‌های ۶ تا ۱۲ را انجام بده:
- ۶: $W := AV_j$.
- ۷: برای $i = 1, 2, \dots, j$ گام‌های ۸ تا ۱۰ را انجام بده:
- ۸: $H_{i,j} := V_i^T W$.
- ۹: $W := W - V_i H_{i,j}$.
- ۱۰: پایان حلقه i .
- ۱۱: تجزیه QR کاهش یافته W را انجام بده: $[V_{j+1}, H_{j+1,j}] = qr(W)$.
- ۱۲: پایان حلقه j .

فرض کنید زیر ماتریس‌های بالا مثلثی $H_{j+1,j}$ رتبه ناقص نباشند، آنگاه m گام فرایند آرنولدی بلوکی می‌تواند اجرا شود. در این حالت رابطه‌های آرنولدی بلوکی زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} A\mathcal{V}_m &= \mathcal{V}_{m+1}\bar{H}_m, \\ &= \mathcal{V}_m\mathcal{H}_m + V_{m+1}H_{m+1,m}E_m^{(m)T}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

که در آن $\bar{H}_m \in \mathbb{R}^{(m+1)p \times mp}$ ماتریسی یکا متعامد است، $\mathcal{V}_m = [V_1, V_2, \dots, V_m] \in \mathbb{R}^{n \times mp}$ یک ماتریس هسنبُگ بالایی بلوکی است و $E_m^{(m)} = [0_p, \dots, 0_p, I_p]^T$.

در ادامه به طور مختصر روش مانده مینیمال تعمیم یافته بلوکی با شروع مجدد (BGMRES) برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) را توضیح می‌دهیم:

فرض کنید $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ یک حدس اولیه و $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ مانده نظیر آن باشد. جواب‌های تقریبی به شکل $X_m = X_0 + \mathcal{V}_m Y_m$ را جستجو می‌کنیم، که در آن \mathcal{V}_m یک پایه یکا متعامد برای زیر فضای کرلیف $\mathcal{K}_m(A, R_0)$ است و $Y_m \in \mathbb{R}^{n \times p}$. ماتریس $Y_m \in \mathbb{R}^{n \times p}$ با تحمیل کردن شرط تعامد

۵۷ تاج الدینی، عزیزی زاده، جمشیدی/ موجک‌ها و جبرخطی ۶(۲) (۱۳۹۸) ۵۱-۷۴
روی مانده متناظر با X_m یعنی

$$R_m = C - \mathcal{A}(X_m) \perp \mathcal{AK}_m(\mathcal{A}, R_0),$$

به دست می‌آید.

طبق لم ۲.۲، $\mathcal{K}_m(\mathcal{A}, R_0) = \mathcal{K}_m(A, R_0)$ ، بنابراین

$$R_m = C - \mathcal{A}(X_m) \perp \mathcal{AK}_m(\mathcal{A}, R_0), \quad (2.2)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱.۲) و $X_m = X_0 + \mathcal{V}_m Y_m$ و $\mathcal{AK}_m(\mathcal{A}, R_0) = \mathcal{AK}(A, R_0) = \text{range}(A\mathcal{V}_m)$ می‌توان رابطه (۲.۲) را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\mathcal{H}}_m^T \bar{\mathcal{H}}_m Y_m + \bar{\mathcal{H}}_m^T \begin{pmatrix} I_{mp} \\ \circ_{p \times mp} \end{pmatrix} Y_m B = \bar{\mathcal{H}}_m^T E_{\setminus}^{(m+1)} \Lambda_1, \quad (3.2)$$

که در آن $E_{\setminus}^{(m+1)} = [I_p, \circ_p, \dots, \circ_p]^T$ با جانشین کردن $\bar{\mathcal{H}}_m = \begin{pmatrix} H_m \\ H_{m+\setminus, m} E_m^{(m)T} \end{pmatrix}$ در معادله (۳.۲)، معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$(H_m^T H_m + E_m^{(m)} H_{m+\setminus, m}^T H_{m+\setminus, m} E_m^{(m)T}) Y_m + H_m^T Y_m B = H_m^T E_{\setminus}^{(m)} \Lambda_1. \quad (4.2)$$

اگر ماتریس H_m نامفرد باشد، معادله (۴.۲) هم ارز با معادله (۵.۲) است.

$$(H_m + H_m^{-T} E_m^{(m)} H_{m+\setminus, m}^T H_{m+\setminus, m} E_m^{(m)T}) Y_m + Y_m B = E_{\setminus}^{(m)} \Lambda_1. \quad (5.2)$$

با حل معادله سیلوستر کاهش یافته (۵.۲) می‌توان ماتریس Y_m را به دست آورد و در نهایت ماتریس X_m که جوابی از معادله سیلوستر (۱.۱) است. الگوریتم این روش در زیر داده شده است:

الگوریتم ۲ [۱۱] روش GMRES بلوکی با شروع مجدد برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (BGMRES)

- ۱: ورودی: ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, حدس اولیه $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ و عدد صحیح m .
- ۲: خروجی: جواب تقریبی X_m .
- ۳: $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ را محاسبه کن.
- ۴: تجزیه QR کاهش یافته R_0 را محاسبه کن: $[V_1, \Lambda_1] = qr(R_0)$.
- ۵: با استفاده از الگوریتم ۱ ماتریس‌های \mathcal{V}_{m+1} و \mathcal{H}_m را تولید کن.
- ۶: برای به دست آوردن Y_m معادله سیلوستر کاهش یافته (۴.۲) یا (۵.۲) را حل کن.
- ۷: جواب تقریبی $X_m = X_0 + \mathcal{V}_m Y_m$ و مانده متناظر با آن $R_m = C - \mathcal{A}(X_m)$ را حساب کن.
- ۸: اگر $\|R_m\|_F < tol$ متوقف شو در غیر اینصورت $X_0 = X_m$ و $R_0 = R_m$ برو به ۴.

۳. یک روش کریلف بلوکی تودرتو بر پایه روش مانده مزدوج تعمیم یافته (BGCRO)

در این بخش روش GCRO بلوکی برای حل معادله ماتریسی (۱.۱) را معرفی می‌کنیم. این روش شامل دو تکرار بیرونی و درونی است. از روش GCR بلوکی به عنوان روش تکراری بیرونی و روش GMRES بلوکی کامل به عنوان روش تکراری درونی استفاده می‌شود. ابتدا نسخه بلوکی GCR که به عنوان روش تکراری بیرونی استفاده می‌شود، را شرح می‌دهیم. دو ماتریس

$$\mathcal{U}_k = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_k], \quad C_k = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_k],$$

را در نظر بگیرید، که $U_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $i = 1, \dots, k$, $C_k = A\mathcal{U}_k$ و $C_k^T C_k = I_{kp}$. در روش BGCRO، بدون اینکه از کلیت مسئله کم شود، فرض کنید $X_0 = 0_{n \times p}$. بنابراین جواب تقریبی $X_k \in \text{range}(\mathcal{U}_k)$ را طوری پیدا می‌کنیم که نرم مانده متناظر با آن مینیمم شود، یعنی

$$\min_{X \in \text{range}(\mathcal{U}_k)} \|C - \mathcal{A}(X)\|_F.$$

یا به طور هم ارز

$$R_k = C - \mathcal{A}(X_k) \perp \text{Arange}(\mathcal{U}_k). \quad (۱.۳)$$

در ادامه می‌توان دید که ماتریس‌های \mathcal{U}_k و C_k طوری ساخته می‌شوند که $range(\mathcal{U}_k)$ برابر با زیرفضای کرلیف

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, R_0) = range[R_0, \mathcal{A}R_0, \dots, \mathcal{A}^{k-1}R_0]$$

شود. طبق لم ۲.۲، $\mathcal{A}range(\mathcal{U}_k) = Arange(\mathcal{U}_k)$ و $Arange(\mathcal{U}_k) = range(C_k)$. بنابراین رابطه (۱.۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R_k = C - \mathcal{A}(X_k) \perp range(C_k). \quad (2.3)$$

چون $X_k \in range(\mathcal{U}_k)$ آنگاه $Y_k \in \mathbb{R}^{kp \times p}$ وجود دارد به طوری که $X_k = \mathcal{U}_k Y_k$. بنابراین، مانده متناظر با آن به صورت زیر است:

$$R_k = C - \mathcal{A}(X_k) = C - A\mathcal{U}_k Y_k - \mathcal{U}_k Y_k B = C - C_k Y_k - \mathcal{U}_k Y_k B.$$

طبق رابطه تعامد (۲.۳) داریم:

$$0 = C_k^T R_k = C_k^T C - C_k^T C_k Y_k - C_k^T \mathcal{U}_k Y_k B.$$

در این صورت Y_k از حل معادله ماتریسی $Y_k + C_k^T \mathcal{U}_k Y_k B = C_k^T C$ بدست می‌آید.

سوال اصلی این است که چگونه ماتریس‌های U_{k+1} و C_{k+1} را انتخاب کنیم تا روش BGCRO همگرایی سریعتری داشته باشد. در اینجا،

$$U_{k+1} = E_k + A^{-1} E_k B, \quad (3.3)$$

را در نظر گرفته ایم، که $E_k = X^* - X_k$ و X^* جواب واقعی معادله ماتریسی سیلواستر (۱.۱) است. چون جواب واقعی در دست نیست باید یک تقریب مناسب برای U_{k+1} بیابیم. برای به دست آوردن تقریب U_{k+1} ، معادله (۳.۳) را از سمت چپ در A ضرب می‌نمائیم، داریم:

$$\begin{aligned} AU_{k+1} &= AE_k + E_k B \\ &= AX^* + X^* B - AX_k - X_k B = R_k. \end{aligned}$$

بنابراین

$$AU_{k+1} = R_k. \quad (۴.۳)$$

برای تخمین زدن U_{k+1} می‌توان معادله ماتریسی (۴.۳) را با هر روشی حل کرد. فرض کنید این معادله با روش BGMRES به صورت زیر حل شود. فرض کنید ماتریس‌های X_1, X_2, \dots, X_n و R_1, R_2, \dots, R_n و U_1, U_2, \dots, U_n و C_1, C_2, \dots, C_n ، با استفاده از روش تکراری بیرونی ساخته شده باشند. حال در روش تکراری درونی U_{k+1} را طوری می‌سازیم که $U_{k+1} \in X_k + \mathcal{K}_m(A, R_k)$. پس یک ماتریس $\hat{Y}_m \in \mathbb{R}^{mp \times p}$ وجود دارد، به طوری که

$$U_{k+1} = X_k + \mathcal{V}_m \hat{Y}_m.$$

در نتیجه مانده متناظر با U_{k+1} طبق روش BGMRES باید در خاصیت تعامد زیر صدق کند:

$$R_k = AU_{k+1} = AX_k + A\mathcal{V}_m \hat{Y}_m \perp A\mathcal{K}_m(A, R_k). \quad (۵.۳)$$

شرط تعامد (۵.۳) معادل با مسئله مینیم سازی زیر است:

$$\min_{U \in X_k + \mathcal{K}_m(A, R_k)} \|R_k - AU\| = \min_{\hat{Y} \in \mathbb{R}^{mp \times p}} \|R_k - AX_k - A\mathcal{V}_m \hat{Y}\|_F. \quad (۶.۳)$$

از حل مسئله مینیم سازی (۶.۳) ماتریس \hat{Y}_m محاسبه می‌شود، سپس می‌توانیم $U_{k+1} = X_k + \mathcal{V}_m \hat{Y}_m$ را با روش GMRES بلوکی تخمین بزینم که آن را با U_{k+1}^{bgmres} نمایش می‌دهیم. حال به تکرار بیرونی بر می‌گردیم. در این تکرار که همان روش تکراری BGCR است ماتریس U_{k+1} که با U_{k+1}^{bgcr}

نمایش داده می‌شود، به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{bgcr} &= U_{k+1}^{bgmres} - \sum_{i=1}^k U_i \Omega_i = U_{k+1}^{bgmres} - \sum_{i=1}^k U_i (C_i^T C_{k+1}) \\ &= U_{k+1}^{bgmres} - \mathcal{U}_k C_k^T C_{k+1} \\ &= X_k + \mathcal{V}_m \hat{Y}_m - \mathcal{U}_k C_k^T A X_k - \mathcal{U}_k C_k^T A \mathcal{V}_m \hat{Y}_m. \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

چون $C_k^T C_k = I$ و $X_k = \mathcal{U}_k Y_k$ ، $X_k \in \text{range}\{\mathcal{U}_k\}$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_k C_k^T A X_k &= \mathcal{U}_k C_k^T A \mathcal{U}_k Y_k \\ &= \mathcal{U}_k C_k^T C_k Y_k = X_k. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

با نظر گرفتن رابطه (۸.۳)، رابطه (۷.۳) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{aligned} U_{k+1}^{bgcr} &= \mathcal{V}_m \hat{Y}_m - \mathcal{U}_k C_k^T A \mathcal{V}_m \hat{Y}_m \\ &= (I - \mathcal{U}_k C_k^T A) \mathcal{V}_m \hat{Y}_m \\ &= A^{-1} (I - C_k C_k^T) A \mathcal{V}_m \hat{Y}_m. \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

با ضرب کردن معادله (۹.۳) از سمت چپ در A می‌توان ماتریس C_{k+1}^{bgcr} را به صورت زیر به دست آورد:

$$C_{k+1}^{bgcr} = A U_{k+1}^{bgcr} = (I - C_k C_k^T) A \mathcal{V}_m \hat{Y}_m.$$

ابتدا تجزیه QR کاهش یافته ماتریس C_{k+1}^{bgcr} را به دست می‌آوریم: $\hat{Q} \hat{R} = C_{k+1}^{bgcr}$ ، که در آن $\hat{Q}^T \hat{Q} = I_p$ و $\hat{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ یک ماتریس بالا مثلثی است. سپس ماتریس‌های U_{k+1}^{bgcr} و C_{k+1}^{bgcr} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{R} U_{k+1}^{bgcr} = U_{k+1}^{bgcr}, \quad (۱۰.۳)$$

$$C_{k+1}^{bgcr} = \hat{Q}, \quad (۱۱.۳)$$

که در (۱۰.۳) و (۱۱.۳)، \hat{Y}_m جواب مسئله مینیم سازی زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{Y} \in \mathbb{R}^{mp \times p}} \|R_k - AX_k - A\mathcal{V}_m \hat{Y}\|_F &= \min_{U \in X_k + \mathcal{K}_m(A, R_k)} \|R_k - AU\|_F \\ &= \min_{\hat{Y} \in \mathbb{R}^{mp \times p}} \|R_k - (I - C_k C_k^T) A \mathcal{V}_m \hat{Y}\|_F. \end{aligned} \quad (12.3)$$

از سوی دیگر مسئله به روز شدن جواب معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) را مد نظر قرار می‌دهیم. در تکرار بیرونی، جواب معادله ماتریسی سیلوستر به صورت زیر است:

$$X_{k+1} \in X_k + \text{range}\{\mathcal{U}_{k+1}\},$$

در نتیجه یک $Z \in \mathbb{R}^{(k+1)p \times p}$ وجود دارد به طوری که

$$X_{k+1} = X_k + \mathcal{U}_{k+1} Z. \quad (13.3)$$

همچنین مانده متناظر با X_{k+1} ، R_{k+1} در شرط گالکین به صورت زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_k - A\mathcal{U}_{k+1} Z - \mathcal{U}_{k+1} ZB \\ &= R_k - C_{k+1} Z - \mathcal{U}_{k+1} ZB \perp \text{range}\{C_{k+1}\}. \end{aligned}$$

طبق شرط تعامد داریم:

$$0 = C_{k+1}^T R_k - Z - C_{k+1}^T \mathcal{U}_{k+1} ZB,$$

یا

$$Z + C_{k+1}^T \mathcal{U}_{k+1} ZB = C_{k+1}^T R_k. \quad (14.3)$$

با حل معادله ماتریسی کاهش یافته (۱۴.۳)، ماتریس Z محاسبه می‌شود و با جانشین کردن در رابطه

(۱۳.۳) ماتریس X_{k+1} به روز می‌شود، که همان جواب تقریبی معادله ماتریسی سیلوستر در گام $k + 1$ می‌باشد.

مطالب بالا را در گزاره زیر به صورت خلاصه بیان می‌نمائیم.

گزاره ۱.۳. فرض کنید $P_C = C_k C_k^T$ ، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک تصویرگر متعامد روی C_k باشد و $A_{C_k} = (I - P_{C_k})A$ همچنین، فرض کنید \mathcal{V}_m یک پایه یکا متعامد برای زیرفضای کرلیف $\mathcal{K}_m(A_{C_k}, R_k)$ است که با استفاده از فرایند آرنولدی بلوکی ساخته شده است. این پایه در رابطه $A_{C_k} \mathcal{V}_m = \mathcal{V}_{m+1} \bar{H}_m$ صدق می‌کند. بعلاوه، فرض کنید \hat{Y}_m جواب مسئله کمترین مربعات زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_m &= \arg \min_{\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times p}} \|R_k - (I - P_{C_k})A \mathcal{V}_m \hat{Y}\|_F \\ &= \arg \min_{\hat{Y} \in \mathbb{R}^{m \times p}} \|R_k - \mathcal{V}_{m+1} \bar{H}_m \hat{Y}\|_F. \end{aligned}$$

آنگاه در تکرار بیرونی U_{k+1} و C_{k+1} به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \hat{R}A^{-1}A_{C_k} \mathcal{V}_m \hat{Y}_m, \\ C_{k+1} &= \hat{Q}, \end{aligned}$$

که در آن ماتریس \hat{Q} و \hat{R} از تجزیه QR کاهش یافته ماتریس $C_{k+1} = A_{C_k} \mathcal{V}_m \hat{Y}_m$ به دست آمده‌اند. همچنین ماتریس X_{k+1} در تکرار بیرونی به صورت زیر به روز می‌شود:

$$X_{k+1} = X_k + U_{k+1} Z_{k+1},$$

که ماتریس Z_{k+1} از حل معادله ماتریسی کاهش یافته زیر به دست می‌آید:

$$Z + C_{k+1}^T U_{k+1} Z B = C_{k+1}^T R_k.$$

مطالب بالا را در الگوریتم ۳ خلاصه می‌نمائیم.

الگوریتم ۳ الگوریتم GCRO بلوکی برای معادله ماتریسی سیلواستر (BGCR)

- ۱: ورودی: ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, حدس اولیه $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, عدد صحیح مثبت m و آستانه همگرایی $tol > 0$ را وارد کن.
- ۲: خروجی: جواب تقریبی X_m .
- ۳: $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ را محاسبه کن.
- ۴: برای $k = 0, 1, \dots$ تا رسیدن به همگرایی گام‌های زیر را انجام بده:
- ۵: تجزیه QR کاهش یافته R_k را محاسبه کن، یعنی $[V_1, \Lambda_k] = qr(R_k)$.
- ۶: برای $j = 1, \dots, m$ گام‌های ۷ تا ۱۵ را انجام بده:
- ۷: $W := AV_j$.
- ۸: برای $i = 1, \dots, k$ گام ۹ را انجام بده:
- ۹: $B_{ij} := C_i^T W$; $W := W - C_i B_{ij}$.
- ۱۰: پایان حلقه i .
- ۱۱: برای $j = 1, \dots, m$ گام ۱۲ را انجام بده:
- ۱۲: $H_{ij} := V_i^T W$; $W := W - V_i H_{ij}$.
- ۱۳: پایان حلقه i .
- ۱۴: تجزیه QR کاهش یافته ماتریس W را محاسبه کن: $W := V_{j+1} H_{j+1, j}$.
- ۱۵: پایان حلقه j .
- ۱۶: مساله کمترین مربعات $\| \begin{pmatrix} \Lambda_k \\ 0_{mp \times p} \end{pmatrix} - \hat{H}_m \hat{Y} \|_F$ را حل کن. $\hat{Y}_m = \arg \min_{Y \in \mathbb{R}^{m \times p}} \| \begin{pmatrix} \Lambda_k \\ 0_{mp \times p} \end{pmatrix} - \hat{H}_m Y \|_F$ را حل کن.
- ۱۷: قرار بده $U_{k+1} = A^{-1}(I - C_k C_k^T) A V_m \hat{Y}_m$.
- ۱۸: قرار بده $C_{k+1} = (I - C_k C_k^T) V_{m+1} \bar{H}_m \hat{Y}_m$.
- ۱۹: تجزیه QR کاهش یافته ماتریس C_{k+1} را محاسبه کن: $\hat{Q} \hat{R} = qr(C_{k+1})$.
- ۲۰: قرار بده: $C_{k+1} = \hat{Q}$.
- ۲۱: معادله ماتریسی $\hat{R} U_{k+1} = U_{k+1}$ را حل کن.
- ۲۲: معادله ماتریسی سیلواستر کاهش یافته زیر را حل کن:
$$Z + C_{k+1}^T U_{k+1} Z B = C_{k+1}^T R_k$$
- و ماتریس Z_{k+1} که جوابی از این معادله است را به دست بیاور.
- ۲۳: $R_{k+1} = C - A X_{k+1} - X_{k+1} B$ و $X_{k+1} = X_k + U_{k+1} Z_{k+1}$.
- ۲۴: اگر $\|R_k\|_F < tol$ متوقف شو.
- ۲۵: پایان حلقه k .

الگوریتم نوع پیش شرط سازی شده الگوریتم BGCR را در زیر ملاحظه نمایید. این الگوریتم FBGCR نامیده می‌شود.

الگوریتم ۴ الگوریتم FBGCR

- ۱: ورودی: ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, حدس اولیه $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, عدد صحیح مثبت m و آستانه همگرایی $tol > 0$ را وارد کن.
- ۲: خروجی: جواب تقریبی X_m .
- ۳: $R_0 = C - \mathcal{A}(X_0)$ را محاسبه کن.
- ۴: برای $k = 0, 1, \dots$ تا رسیدن به همگرایی گام‌های زیر را انجام بده:
- ۵: تجزیه QR کاهش یافته R_k را محاسبه کن، یعنی $[V_1, \Lambda_k] = qr(R_k)$.
- ۶: برای $j = 1, \dots, m$ گام‌های ۷ تا ۱۶ را انجام بده:
- ۷: $\hat{W}_j := M_j^{-1} V_j$.
- ۸: $W := A \hat{W}_j$.
- ۹: برای $i = 1, \dots, k$ گام ۹ را انجام بده:
- ۱۰: $B_{ij} := C_i^T W$; $W := W - C_i B_{ij}$.
- ۱۱: پایان حلقه i .
- ۱۲: برای $j = 1, \dots, m$ گام ۱۲ را انجام بده:
- ۱۳: $H_{ij} := V_i^T W$; $W := W - V_i H_{ij}$.
- ۱۴: پایان حلقه i .
- ۱۵: تجزیه QR کاهش یافته ماتریس W را محاسبه کن: $W := V_{j+1} H_{j+1, j}$.
- ۱۶: پایان حلقه j .
- ۱۷: مساله کمترین مربعات $\|\hat{\mathcal{H}}_m \hat{Y}\|_F - \Lambda_k$ را حل کن: $\hat{Y}_m = \arg \min_{Y \in \mathbb{R}^{mp \times p}} \left(\begin{matrix} \Lambda_k \\ \circ_{mp \times p} \end{matrix} \right)$.
- ۱۸: قرار بده $U_{k+1} = A^{-1}(I - C_k C_k^T) A \hat{W}_m \hat{Y}_m$ ، که در آن $\hat{W}_m = [M_1^{-1} V_1, \dots, M_m^{-1} V_m]$.
- ۱۹: قرار بده $C_{k+1} = (I - C_k C_k^T) V_{m+1} \hat{\mathcal{H}}_m \hat{Y}_m$.
- ۲۰: تجزیه QR کاهش یافته ماتریس C_{k+1} را محاسبه کن: $\hat{Q} \hat{R} = qr(C_{k+1})$.
- ۲۱: قرار بده: $C_{k+1} = \hat{Q}$.
- ۲۲: معادله ماتریسی $\hat{R} U_{k+1} = U_{k+1}$ را حل کن.
- ۲۳: معادله ماتریسی سیلواستر کاهش یافته فوق را حل کن: $Z + C_{k+1}^T U_{k+1} Z B = C_{k+1}^T R_k$ و ماتریس Z_{k+1} که جوابی از این معادله است را به دست بیاور.
- ۲۴: $X_{k+1} = X_k + U_{k+1} Z_{k+1}$ و $R_{k+1} = C - A X_{k+1} - X_{k+1} B$.
- ۲۵: اگر $\|R_k\|_F < tol$ متوقف شو.
- ۲۶: پایان حلقه k .

۴. نتایج عددی

در این بخش، چند مثال عددی آورده‌ایم، برای اینکه کارایی روش جدید را شرح دهیم.

در مثال‌های زیر رفتار عددی الگوریتم جدید (BGCR) و نوع پیش شرط سازی شده آن (FBGCR) را در مقایسه با الگوریتم BGMRES [۱۱] و الگوریتم‌های تکراری بلوکی دیگر مانند الگوریتم BiBicgstab [۱۲] و الگوریتم HSS [۲] برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) نشان می‌دهیم. در الگوریتم FBGCR از پیش شرط ساز $ILU(\circ)$ استفاده کرده‌ایم. در حقیقت، در هر تکرار داخلی از الگوریتم ۴، ماتریس \hat{W}_j را به عنوان جواب تقریبی معادله ماتریسی $\hat{W}_j = V_j A \hat{W}_j$ به روز می‌کنیم. برای حل این دستگاه ابتدا با استفاده از متلب تجزیه LU ناقص ماتریس A را به دست می‌آوریم، سپس معادله ماتریسی به دو دستگاه تبدیل می‌شود که آنها را نیز با متلب حل کرده‌ایم. برای تمام مثال‌ها حدس اولیه ماتریس $X_0 = \circ_{n \times p}$ و ماتریس سمت راست به گونه‌ای در نظر گرفته شده است که $X^* = rand(n, p)$ جواب دقیق معادله سیلوستر (۱.۱) است. همچنین $tol = 10^{-8}$. معیار توقف برای تمام مثال‌ها

$$\|C - AX_k - X_k B\|_F < tol \|C\|_F,$$

یا ماکزیمم تعداد تکرارها $maxit = 2000$ است. از چهار دیدگاه روش‌های عددی را با هم مقایسه می‌کنیم: تعداد تکرارها (به آن به صورت iter. اشاره شده است.)، زمان اجرا بر حسب ثانیه (به آن به صورت CPU اشاره شده است.)، $-F$ نرم مانده واقعی به صورت $\|R_k\|_F = \|C - AX_k - X_k B\|_F$ است و نرم خطای نسبی که به صورت زیر نشان داده شده است:

$$\|X_k - X^*\|_F / \|X^*\|_F$$

مثال ۱.۴. هدف از این مثال این است که رفتار عددی روش‌های $BiBicgstab$, $BGMRES$, $BFGCR$ و $BGCR$ را برای حل معادله ماتریسی سیلوستر (۱.۱) نشان دهیم. عملگر دیفرانسیلی زیر با شرایط مرزی دیریکله را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}(u) = -\Delta u + 2v \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial u}{\partial y},$$

این عملگر با استفاده از روش تفاضلات محدود روی مربع واحد $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ با اندازه‌های

		$n = 3000$				
v	m	روش	iter.	CPU	$\ R_k\ _F$	$\ X_k - X^*\ _F / \ X^*\ _F$
۱۰	۲	BGCR	۲۲	۱۹۴۹۶	$۱,۵۸۹۸e-۰۶$	$۴,۰۸۶۸e-۰۹$
		FBGCR	۲	۰,۱۶۹۰	$۱,۴۰۰۱e-۰۹$	$۸,۱۹۲۳e-۱۰$
		BGMRES	۲۰	۲,۱۸۵۱	$۱,۰۹۸۳e-۰۶$	$۱,۰۲۸۴e-۰۸$
		BIBicgstab	-	-	-	-
		HSS	-	-	-	-
۱	۳	BGCR	۳۹	۵۶۲,۸۶	$۱,۴۰۲۵e-۰۶$	$۳,۷۴۲۰e-۰۹$
		FBGCR	۲	۰,۲۱۸۹	$۲,۸۱۷۵e-۰۹$	$۸,۷۶۸۱e-۱۰$
		BGMRES	۴۵	۶,۵۴۶۸	$۲,۰۰۵۵e-۰۶$	$۲,۲۵۴۳e-۰۷$
		BIBicgstab	-	-	-	-
		HSS	-	-	-	-

جدول ۱: نتایج عددی پنج الگوریتم روی ماتریس‌های مثال ۱.۴، $p = 10$ ، $m = 2, 3$ ، $v = 1, 10$ و $tol = 10^{-8}$. علامت "-" نشان می‌دهد الگوریتم تا ۲۰۰۰ تکرار همگرا نیست.

شبکه $h = \frac{1}{n+1}$ در جهت محور x و $k = \frac{1}{p+1}$ در جهت محور y ها گسسته سازی شده است. این عملگر دو ماتریس A و B را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$A = \text{tridiag}(-1 - vh, 2, -1 + vh), \quad B = \text{tridiag}(-1 - vk, 2, -1 + vk).$$

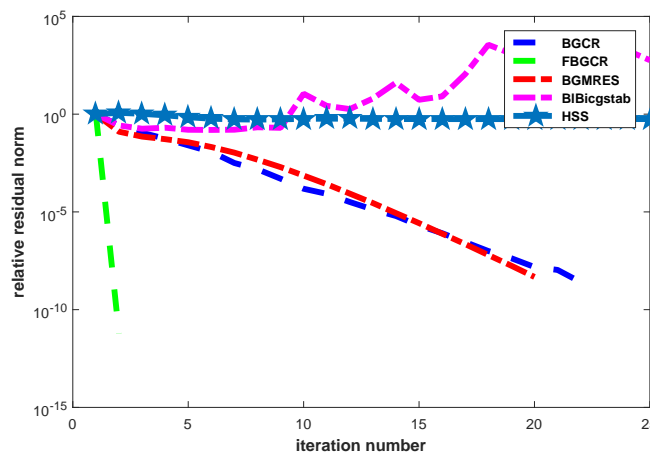
نتایج عددی با n, m, v متفاوت در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش شده‌اند. همانطور که از جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌کنید روش FBGCR از نظر زمان اجرا، تعداد تکرارها، نرم مانده و نرم خطای نسبی بر بقیه روش‌ها برتری دارد. حتی می‌توان دید روش‌های HSS و BIBicgstab برای بعضی مقادیر m ، v و n بعد از ۲۰۰۰ تکرار همگرا نشده‌اند. در شکل ۱ می‌توان دید در دو روش BGCR و FBGCR نرم فروبنیوس مانده نسبی به طور چشمگیری کاهش پیدا می‌کند. بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم برای مقادیر کوچک m دو روش BGCR و FBGCR می‌توانند گزینه‌های خوبی برای حل معادله سیلوستر (۱.۱) باشند. همچنین، همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌کنید نرم خطای نسبی دو روش BGCR و BGMRES تقریباً رفتاری شبیه یکدیگر دارند و چون روش FBGCR در دو تکرار همگرا شده است نرم خطای نسبی آن با روش‌های دیگر هم پوشانی دارد. بنابراین می‌توان گفت سه روش BGCR و FBGCR و BGMRES از دقت خوبی برخوردار هستند.

مثال ۲.۴. در این مثال ماتریس A از جدول ۳ که در آن نام ماتریس‌ها، اندازه، تعداد عناصر مخالف صفر و نوع آنها ذکر شده، از وب سایت [۱۶] انتخاب می‌شود و ماتریس B با دستور fdm_2d_matrix از LYAPACK [۱۹] به صورت $(10, e^{y^x}, \cos xy, \sqrt{p})$ در نظر گرفته می‌شود.

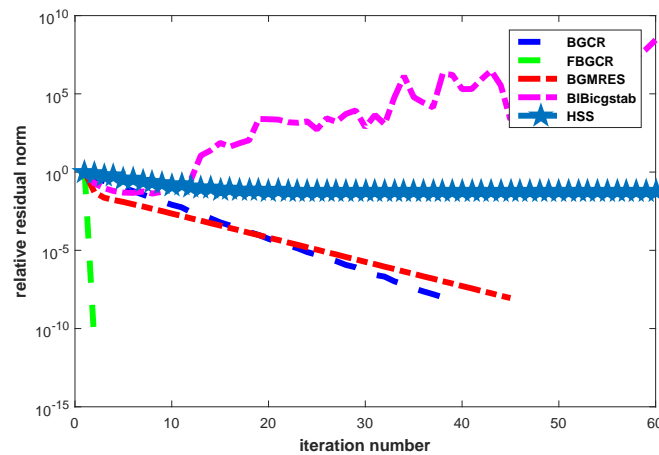
در اینجا، $p = 9, 16$ و $m = 2$ در نظر گرفته شده است. نتایج عددی گزارش شده در جدول‌های ۴

		$n = 4000$				
v	m	روش	iter.	CPU	$\ R_k\ _F$	$\ X_k - X^*\ _F / \ X^*\ _F$
۱۰	۲	BGCR	۲۳	۴۹۳٫۰۵	$۱٫۲۶۱۳e-۰۶$	$۳٫۰۳۶۱e-۰۹$
		FBGCR	۲	۰٫۳۰۲۶	$۲٫۸۶۹۵e-۰۹$	$۸٫۱۶۹۲e-۱۰$
		BGMRES	۲۰	۳٫۷۱۶۱	$۱٫۳۶۵۱e-۰۶$	$۱٫۱۰۳۱e-۰۸$
		BIBicgstab	-	-	-	-
		HSS	-	-	-	-
۱	۳	BGCR	۳۹	۱۳۰۹٫۱	$۱٫۹۴۲۱e-۰۶$	$۴٫۳۸۳۴e-۰۹$
		FBGCR	۲	۰٫۳۰۱۹	$۶٫۰۷۱۹e-۰۹$	$۸٫۷۸۷۰e-۱۰$
		BGMRES	۴۵	۸٫۱۱۳۴	$۲٫۳۱۲۸e-۰۶$	$۲٫۲۴۸۰e-۰۷$
		BIBicgstab	-	-	-	-
		HSS	-	-	-	-

جدول ۲: نتایج عددی پنج الگوریتم روی ماتریس‌های مثال ۱.۴، $p = 10, m = 2, 3, v = 1, 10$ و $tol = 10^{-8}$ علامت "-" نشان می‌دهد الگوریتم تا ۲۰۰۰ تکرار همگرا نیست.

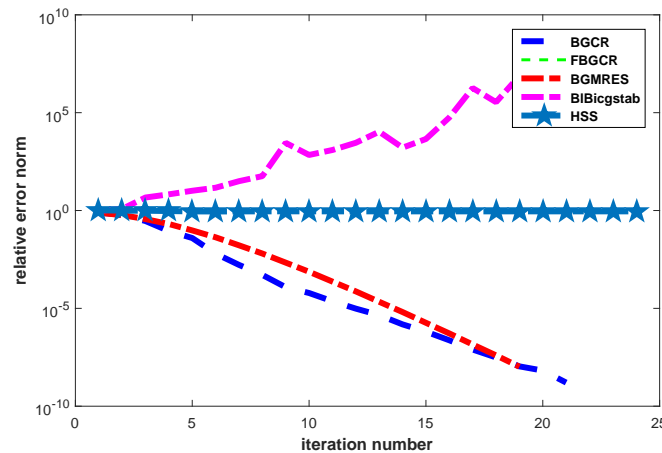


$n = 3000, p = 10, v = 10$ (آ)

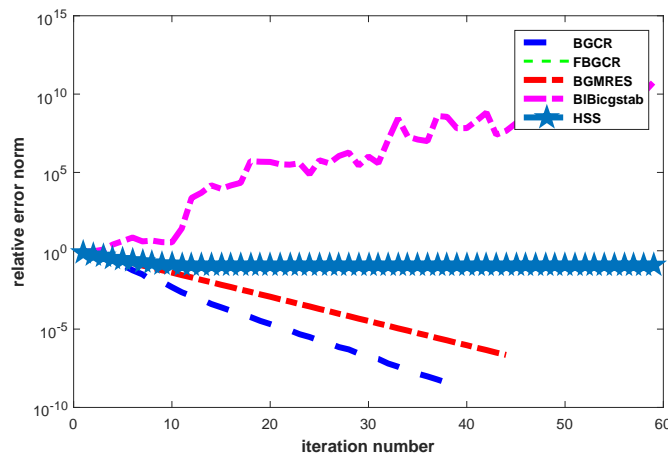


$n = 3000, p = 10, v = 1$ (ب)

شکل ۱: مقایسه نرم فروبنیوس مانده نسبی روش‌های تکراری متفاوت روی ماتریس‌های مثال ۱.۴.



$$n = 3000, p = 10, v = 10 \quad (\text{آ})$$



$$n = 3000, p = 10, v = 1 \quad (\text{ب})$$

شکل ۲: مقایسه نرم خطای نسبی روش‌های تکراری متفاوت روی ماتریس‌های مثال ۱.۴.

۵ و منحنی‌های همگرایی که در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند برتری روش FBGCR بر BGCR را نشان می‌دهند. روش BGCR از نظر زمان اجرا، تعداد تکرارها و سرعت همگرایی بر BGCR ارجحیت دارد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش مانده مزدوج تعمیم یافته بلوکی و ترکیب پیش شرط ساز انعطاف پذیر با تکرار درونی را برای حل معادله سیلوستر (۱.۱) شرح داده ایم. همچنین می‌توان دید که اگر مانده بلوکی رتبه

ID	Matrix	n	nnz	Type	Application area
۱	orsirr_1	۱۰۳۰	۶۸۵۸	Real unsymmetric	Computational Fluid Dynamics Problem
۲	orsreg_1	۲۲۰۵	۱۴۱۳۳	Real unsymmetric	Computational Fluid Dynamics Problem
۳	nos5	۴۶۸	۵۱۷۲	Real symmetric	Structural Problem
۴	orsirr_2	۸۸۶	۵۹۷۰	Real unsymmetric	Computational Fluid Dynamics Problem
۵	cage9	۳۵۳۴	۴۱۵۹۴	Real unsymmetric	Directed Weighted Graph
۶	cage10	۱۱۳۹۷	۱۵۰۶۴۵	Real unsymmetric	Directed Weighted Graph

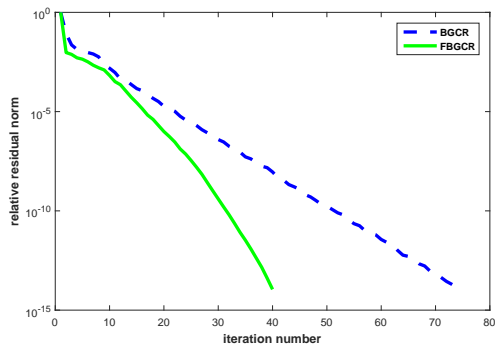
جدول ۳: ویژگیهای ماتریس A استفاده شده در مثال ۲.۴.

$m = ۲$		$p = ۱۶$			
A	Method	iter.	CPU	$\ R_k\ _F$	$\ X_k - X^*\ _F / \ X^*\ _F$
orsirr_۱	BGCR	۶۴	۵۱٫۹۲۵	$۹٫۵۰۸۶e - ۰۹$	$۱٫۷۰۷۵e - ۱۳$
	FBGCR	۲۴	۶٫۰۸۰۸	$۵٫۶۴۲۹e - ۰۹$	$۴٫۹۶۵۰e - ۱۰$
orsreg_۱	BGCR	۶۶	۴۳٫۱۴۷	$۸٫۳۷۴۲e - ۰۹$	$۵٫۷۰۴۹e - ۱۳$
	FBGCR	۳۶	۴۳٫۳۸۴	$۴٫۷۳۲۶e - ۰۹$	$۱٫۵۶۶۰e - ۱۶$
nos5	BGCR	۲۸	۲٫۷۲۳۳	$۳٫۱۷۹۵e - ۰۹$	$۳٫۰۳۲۳e - ۱۲$
	FBGCR	۱۹	۱٫۲۲۱۱	$۶٫۱۷۶۵e - ۰۹$	$۲٫۴۳۳۶e - ۰۶$
orsirr_۲	BGCR	۵۶	۳۰٫۵۰۳	$۵٫۳۴۹۲e - ۰۹$	$۶٫۴۸۶۱e - ۱۴$
	FBGCR	۲۴	۴٫۶۷۷۹	$۲٫۰۱۲۵e - ۰۹$	$۴٫۶۶۴۸e - ۱۰$
cage9	BGCR	۲۵	۵۸٫۰۸۲	$۷٫۱۲۸۸e - ۰۹$	$۳٫۵۰۷۳e - ۱۳$
	FBGCR	۲۳	۵۱٫۴۲۸	$۴٫۹۷۲۴e - ۰۹$	$۱٫۴۴۶۹e - ۱۴$
cage۱۰	BGCR	۲۶	۱۴۳٫۱	$۶٫۷۷۷۶e - ۰۹$	$۱٫۶۹۴۱e - ۱۳$
	FBGCR	۲۵	۱۳۰٫۲۹	$۳٫۴۱۷۵e - ۰۹$	$۱٫۳۱۶۸e - ۱۵$

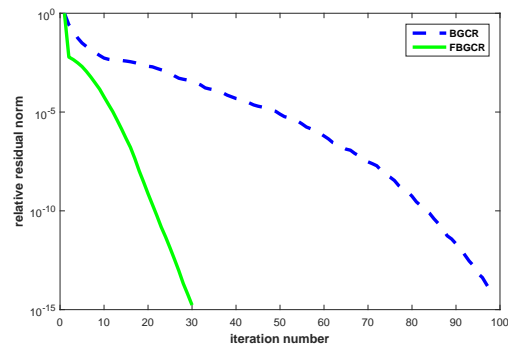
جدول ۴: تعداد تکرارها، زمان اجرا، نرم فروبنیوس مانده و نرم فروبنیوس خطای نسبی برای مثال ۲.۴.

$m = ۲$		$p = ۹$			
A	Method	iter.	CPU	$\ R_k\ _F$	$\ X_k - X^*\ _F / \ X^*\ _F$
orsirr_۱	BGCR	۹۹	۶۲٫۹۷۹	$۷٫۳۹۷۸e - ۰۹$	$۹٫۵۱۵۵e - ۱۳$
	FBGCR	۳۰	۵٫۷۴۲۰	$۲٫۷۶۵۴e - ۰۹$	$۴٫۰۲۹۰e - ۰۸$
orsreg_۱	BGCR	۷۵	۱۰۳٫۹۲	$۶٫۲۹۲۹e - ۰۹$	$۵٫۳۷۵۸e - ۱۳$
	FBGCR	۴۰	۳۴٫۷۱۰	$۸٫۳۰۷۸e - ۰۹$	$۵٫۸۰۹۷e - ۱۲$
nos5	BGCR	۴۴	۴٫۷۴۶۰	$۷٫۸۶۸۰e - ۰۹$	$۳٫۹۵۹۳e - ۱۲$
	FBGCR	۲۶	۱٫۳۸۸۵	$۳٫۱۰۵۰e - ۱۰$	$۷٫۸۶۱۵e - ۱۰$
orsirr_۲	BGCR	۸۹	۴۰٫۲۶۲	$۹٫۰۳۹۶e - ۰۹$	$۱٫۱۶۴۶e - ۱۲$
	FBGCR	۲۸	۳٫۸۸۲۳	$۴٫۱۹۴۹e - ۰۹$	$۵٫۳۲۸۵e - ۱۲$
cage9	BGCR	۲۶	۵۲٫۶۷۶	$۵٫۱۱۹۷e - ۰۹$	$۳٫۷۷۵۲e - ۱۳$
	FBGCR	۲۴	۴۰٫۰۵۹	$۷٫۷۴۳۷e - ۰۹$	$۵٫۰۰۹۸e - ۱۵$
cage۱۰	BGCR	۲۷	۹۶٫۳۴۳	$۴٫۳۴۲۶e - ۰۹$	$۱٫۵۰۷۸e - ۱۳$
	FBGCR	۲۶	۸۶٫۱۶۰	$۳٫۷۱۲۴e - ۰۹$	$۴٫۶۱۸۰e - ۱۶$

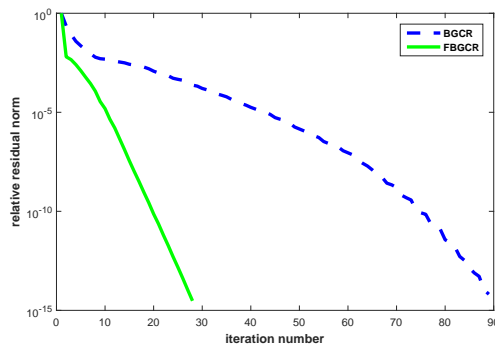
جدول ۵: تعداد تکرارها، زمان اجرا، نرم فروبنیوس مانده و نرم فروبنیوس خطای نسبی برای مثال ۲.۴.



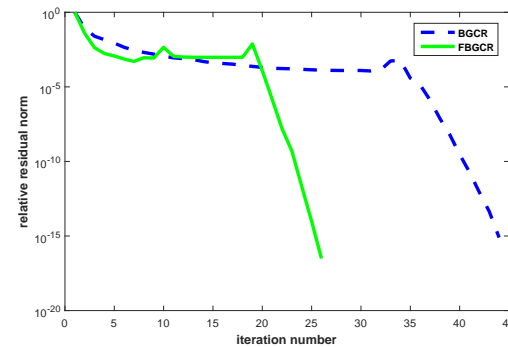
orsereg_1 (ب)



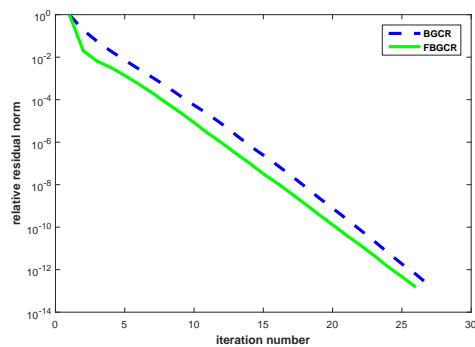
orsirr_1 (آ)



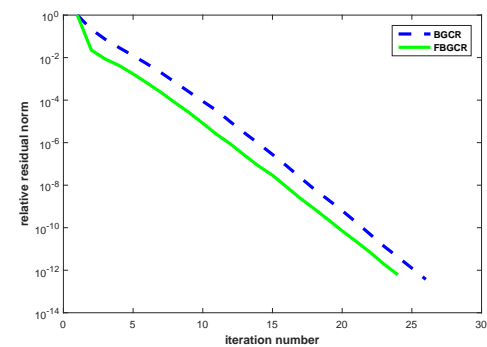
orsirr_2 (د)



nos5 (ج)



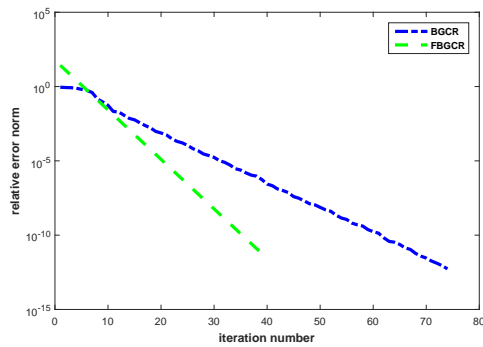
cage10 (و)



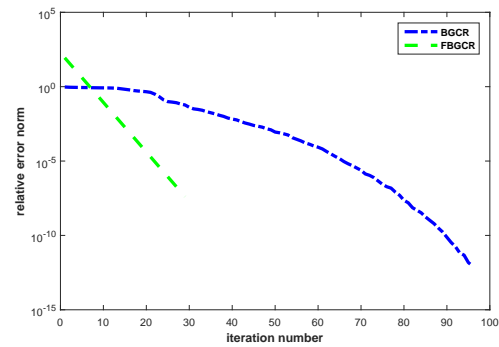
cage9 (ه)

شکل ۳: منحنی های همگرایی مربوط به مانده نسبی برای مثال ۲.۴ با $m = 2$ و $p = 9$.

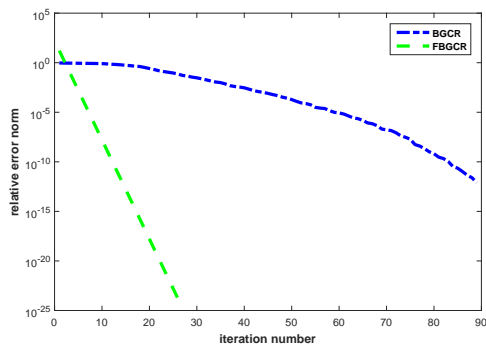
کامل باشد، نرم فروبنیوس مانده بلوکی تولید شده توسط روش BGCR رفتار ناصعودی دارد. بعلاوه می‌توان ملاحظه نمود هنگامیکه با این روش پیش شرط ساز ترکیب می‌شود سرعت همگرایی آن بالا می‌رود. در پایان مثال‌های عددی کارایی روش فوق‌الذکر را نشان می‌دهند.



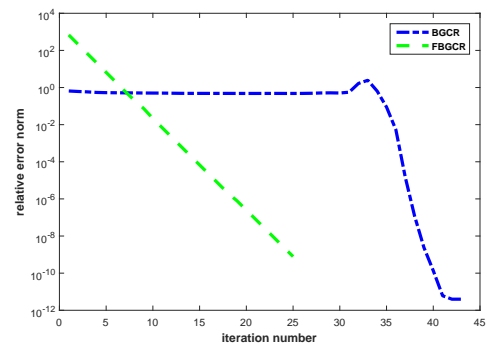
orsereg_1 (ب)



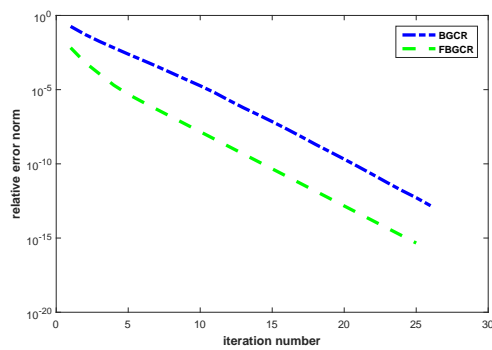
orsirr_1 (آ)



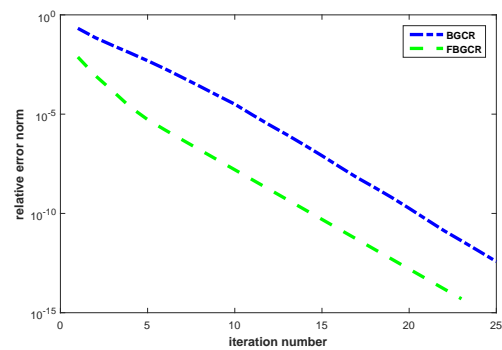
orsirr_2 (د)



nos5 (ج)



cage10 (و)



cage9 (ه)

شکل ۴: منحنی های همگرایی مربوط به خطای نسبی برای مثال ۲.۴ با $p = 9$ و $m = 2$.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم و سرکار خانم دکتر فاطمه پنجعلی بیک برای پیشنهادات ارزشمندشان کمال تشکر و قدردانی را داریم.

- [1] S. Agoujil, A.H. Bentbib, K. Jabilou and E.M. Sadek, A minimal residual norm method for large-scale Sylvester matrix equations, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **43** (2014) 45–59.
- [2] Z-Z. Bai, Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for continuous Sylvester equations, *Journal of Computational Mathematics*, **29** (2011) 185–198.
- [3] R.H. Bartels and G.W. Stewart, Solution of the matrix equation $AX + XB = C$, Algorithm 432, *Communications of the ACM*, **15** (1972) 820–826.
- [4] P. Benner, R.C. Li, and N. Truhar, On the ADI method for Sylvester equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233** (2009), 1035–1045.
- [5] A. Bouhamidi, and K. Jabilou, A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications, *Applied Mathematics and Computation*, **206** (2008), 687–694.
- [6] B.N. Datta and K. Datta, Theoretical and Computational Aspects of some Linear Algebra Problems in Control Theory, in: *Computational and Combinatorial Methods in Systems Theory*, eds. C.I. Byrnes and A. Lindquist, *Elsevier, Amsterdam*, (1986), 201–212.
- [7] E. de Sturler, Nested Krylov methods based on GCR, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **67** (1996), 15–41.
- [8] E. de Sturler, Truncation strategies for optimal Krylov subspace methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **36** (1999), 864–889.
- [9] M. Dehghan and M. Hajarian, Two algorithms for finding the Hermitian reflexive and skew-Hermitian solutions of Sylvester matrix equations, *Applied Mathematics Letters*, **24** (2011), 444–449.
- [10] G.H. Golub, S. Nash and C. Van Loan, A Hessenberg–Schur method for the problem $AX + XB = C$, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **24** (1979), 909–913.
- [11] A.El. Guennouni, K. Jbilou and A.J. Riquet, Block Krylov Subspace Methods for Solving Large Sylvester Equations, *Numerical Algorithms*, **29** (2002), 75–96.
- [12] A.El. Guennouni, K. Jbilou and H. Sadok, A block version of BICGSTAB for linear systems with multiple right-hand sides, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **16** (2003), 129–142.
- [13] C. Hyland and D. Bernstein, The optimal projection equations for fixed-order dynamic com-

- pensation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **29** (1984), 1034–1037.
- [14] M. Khorsand Zak and F. Toutounian, Nested splitting CG-like iterative method for solving the continuous Sylvester equation and preconditioning, *Advances in Computational Mathematics*, **40** (2013), 865–880.
- [15] J. Laub, M.T. Heath, C. Paige and R.C. Ward, Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalisation algorithms, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **32** (1987) 115–122.
- [16] Matrix Market, <http://math.nist.gov/matrixMarket>.
- [17] J. Meng, H.B Li and Y.-F. Jing, A new deflated block GCROT(m, k) method for the solution of linear systems with multiple right-hand sides, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **300** (2016), 155–171.
- [18] J. Meng, P.Y. Zhu and H.B. Li, A block GCROT(m, k) method for linear systems with multiple right-hand sides, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **225** (2014), 544–554.
- [19] T. Penzel, *LYAPACK: A MATLAB toolbox for large Lyapunov and Riccati equations, model reduction problems, and linear-quadratic optimal control problems*, software available at <https://www.tu-chemnitz.de/sfb393/lyapack/>.
- [20] D.K. Salkuyeh and F. Toutounian, New approaches for solving large Sylvester equations, *Applied Mathematics and Computation*, **173** (2006) 9–18.
- [21] H.A. Van der Vorst and C. Vuik, GMRESR: A family of nested GMRES methods, *Technical Report 91-80, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Delft, Netherlands*, (1991).