موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۷۱-۸۸

Wavelets and Linear Algebra

موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

g-s-دنباله‌ها و شرایط معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز

آزاده علیجانی*[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۱ دی ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۲۲ مرداد ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور ۱۳۹۸

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

کلمات کلیدی:

g-قاب، s-g-پایه‌ریس، s-g-قاب، عملگر ضربی‌ساز، عملگر قاب.

چکیده

نظریه قاب یکی از موضوعات تحقیقاتی ریاضی است که در دهه‌های اخیر در حل مسائل مختلف کاربردی و شاخه‌های مرتبط با ریاضیات به عنوان یک ابزار دقیق و کارآمد مورد استفاده قرار گرفته است. در این راستا، مطالعه عملگر ضربی‌ساز که نقش بسزایی در موارد فوق دارد، اهمیت یافته و در این صفحات مورد هدف می‌باشد. این مقاله به ارائه‌ی شرایط کافی برای معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز متناظر با s-g-قاب‌ها، s-g-پایه‌های ریس و s-g-پایه‌های متعامد یکه پرداخته و ضابطه عملگر معکوس آن را مطرح می‌نماید. سپس، با توجه به رابطه s-g-قاب‌ها وقاب‌های توسیع یافته، سعی در بررسی شرایط فوق برای معکوس‌پذیری عملگرضربی‌ساز و به‌دست آوردن ضابطه معکوس آن می‌نماید.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©

*نویسنده مسئول

۱. مقدمه

در هر شاخه از ریاضیات، مسیر تحقیقاتی و توسعه تقریباً با موضوعات و شاخه‌های دیگر یکسان بوده است. نظریه قاب‌ها نیز تاریخچه‌ای مشابه با دیگر شاخه‌های ریاضیات داشته است. قاب‌ها در ابتدای ظهور تا زمان شروع نظریه موجک‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفتند. پس از طرح نظریه موجک‌ها مطالعه و تحقیق بر قاب‌ها به صورت جدی ادامه یافت. تا جایی‌که در سال‌های اخیر با درک حل بسیاری از مسائل کاربردی با استفاده ازاین مفهوم، سرعت توسعه و بررسی تحقیقات دراین زمینه بسیار افزایش یافته است. در سال ۱۹۸۵، دابشی[۱] و همکارانش [۸]، تعبیر ارائه شده به وسیله دافین[۲] و شیفر[۳] [۹]، را به شکل قاب‌های امروزی معرفی نموده و مشاهده کردند که قاب‌ها را می‌توان جایگزین پایه‌های متعامد یکه برای تجزیه توابع در $L^۲(\mathbb{R})$ مشابه تجزیه حاصل در سری فوریه این توابع نمود. این جایگزینی در مقاله [۱۱]، به صورت جدی‌تر مطرح شد. پس از آن نظریه قاب‌ها از ابعاد مختلف مورد مطالعه و توسیع قرار گرفت. بخشی از تحقیقات بر فضاهای مختلف زمینه‌ای که اعضای قاب از آن انتخاب می‌شدند متمرکز گردید و مفاهیم قاب‌ها برای فضاهای باناخ [۴]، هیلبرت C^*-مدولی [۵] و غیره بیان شدند [۵] و [۱۰]. همچنین شاخه‌ای از مطالعات در نظریه قاب، بر نوع اعضای دنباله کاندیدی برای قاب شدن تمرکز نمودند و مفاهیمی مانند قاب‌های زیرفضایی و قاب‌های توسیع‌یافته و غیره مطرح شدند [۶] و[۱۹]. بخش عظیمی از کاربردهای قاب‌ها در موضوع پردازش تصویر و پردازش سیگنال‌ها بوده و از آنجا که در دهه‌های اخیر، کاربرد پردازش سیگنال در قسمت‌هایی مانند تصویربرداری پزشکی و ارتباطات بی‌سیم افزایش یافته‌اند، مطالعه عملگر ضربی‌ساز متناظر با دوقاب یا دو دنباله بسل[۶] مورد توجه قرار گرفت. در موارد کاربردی که نیاز به استفاده از عملگر ضربی‌ساز مطرح می‌شود خاصیت معکوس‌پذیری این عملگر و ضابطه معکوس آن اهمیت پیدا می‌کند. نویسندگان در [۳]، [۱۶] مفهوم عملگرضربی‌ساز متناظر با دو قاب و دو g-قاب را معرفی نمودند و از مناظر مختلف ویژگی‌های این عملگر را بررسی

آدرس‌ایمیلها: alijani@vru.ac.edu (آزاده علیجانی)
موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۸) ©
http://doi.org/10.22072/wala.2019.101592.1215

[1]Daubechies
[2]Duffin
[3]Schaeffer
[4]Banach
[5]Hilbert C^*-module
[6]Bessel

نموده‌اند. با توجه به معرفی دسته دیگری از قاب‌ها تحت عنوان قاب‌های توسیع‌یافته تک عضوی یا تنها [۱۷]، s-g-قاب‌ها[۷]، برخی از نتایج بر g-قاب‌ها شکل دیگری پیدا خواهند کرد و ارائه برهان‌های آنها از راه‌های سریع‌تری امکان‌پذیر می‌گردد. دراین مطالعه ابتدا برخی از خواص s-g-قاب‌ها ارائه شده و سپس خواصی از عملگر ضربی‌ساز متناظر با دو s-g-قاب (s-g-بسل، s-g-پایه‌ریس[۸] و s-g-پایه متعامد یکه) از قبیل خوش‌تعریفی و کران‌داری و معکوس‌پذیری بررسی شده و سعی می‌شود ضابطه عملگر معکوس از عملگر ضربی‌ساز ارائه شود.

مطالعه حاضر به‌گونه‌ای که توضیح داده خواهد شد تدوین شده است. در ادامه این بخش به مرور کوتاهی بر مفاهیم مقدماتی در نظریه قاب، مورد نیاز در بخش‌های آینده پرداخته می‌شود. بخش دوم شرایط کافی برای معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز متناظر با دو s-g-قاب را معرفی نموده و ضابطه معکوس یک‌طرفه معکوس عملگر ضربی‌ساز ارائه می‌نماید. عملگر ضربی‌ساز متناظر دو s-g-پایه‌ریس و خواص آن در بخش سوم مطرح شده است. همچنین این بخش شامل شرایطی برای معکوس‌پذیری عملگرضربی‌ساز s-g-پایه‌های متعامد یکه نیز می‌باشد. با توجه به روابط مطرح شده بین s-g-قاب‌ها و g-قاب‌ها و نتایج حاصل در خصوص معکوس‌پذیری عملگرضربی‌ساز s-g-قاب‌ها و ضابطه عملگر معکوس آن در بخش‌های قبل، بخش چهارم به ارائه شرایط کافی برای معکوس‌پذیری عملگرضربی‌ساز g-قاب‌ها و ضابطه معکوس آن می‌پردازد.

پیش از ورود به مباحث اصلی، در خصوص نماد انواع عملگرهای معکوس‌پذیر استفاده شده در طول مطالعه و مفهوم معکوس‌پذیری توضیحاتی ارایه می‌گردد. در بحث حاضر، شرط لازم برای معکوس‌پذیری یک عملگر پوشایی آن عملگر در نظر گرفته نشده و با وجود خاصیت یک به یکی، عملگر معکوس بر بردش وجود پیدا کرده (که عملگر شبه معکوس نامیده می‌شود) و خللی در استدلالهای این مطالعه ایجاد نمی‌نماید. از انواع عملگرهای معکوس‌پذیر (عملگر معکوس‌پذیر از راست، عملگر معکوس‌پذیر از چپ و عملگر معکوس‌پذیر که لزوما شرط پوشایی مورد نظر نیست.) استفاده شده است. اما برای راحت‌تر شدن مباحث و بنا به نوع استفاده از آنها در مسیر مطالعه، از استفاده از نمادهای متعدد (نماد شبه معکوس و غیره) پرهیز گردیده و برای همه نوع معکوس‌پذیری از یک نماد، نماد معکوس‌پذیری یا معکوس‌پذیری دوطرفه استفاده شده و فقط به قید نوع معکوس‌پذیری در استفاده از ویژگی موجود بسنده شده است.

[7] Singlton g-frame
[8] Riesz basis

برای آغاز صحبت در خصوص مقدمات بحث نظریه قاب، خواننده را به دیدن مراجع [۷] و [۴]، دعوت نموده و با مرور کوتاهی بر g-قاب‌ها [۱۹] و s-g-قاب‌ها [۱۷]، آماده ورود به مطالعات مورد هدف در این مقاله می‌شویم. یک قاب توسیع یافته، g-قاب، دنباله $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ از عملگرهای خطی و کراندار از فضای هیلبرت H [۹] به فضاهای هیلبرت K_i است که برای ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ در رابطه نامساوی زیر صدق کند.

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in H,$$

برای g-قاب $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$، عملگر قاب $S_\Lambda : H \longrightarrow H$ با ضابطه $S_\Lambda(f) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i^*\Lambda_i f$ عملگری خوش تعریف، کران‌دار، الحاق‌پذیر، مثبت و معکوس‌پذیر است و قاب $\{\Lambda_i S_\Lambda^{-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ با نام g-قاب دوگان کانونی را القا می‌نماید. هر g-قاب و g-قاب دوگان کانونی القا شده‌اش فرمول بازسازی به صورت $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i^*\widetilde{\Lambda}_i f$ بر H را به دست می‌دهد، که در آن $\widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i S_\Lambda^{-1}$ برای راحتی انتخاب شده است. دنباله $\{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ را یک g-پایه‌ریس نامند هرگاه ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ باشند به طوری که نامساوی زیر برای هر $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برقرار باشد.

$$A\sum_{i\in\mathbb{N}} \|g_i\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i^* g_i\|^2 \leq B\sum_{i\in\mathbb{N}} \|g_i\|^2.$$

همانطور که نویسنده در مرجع[۲]، بیان می‌کند بعضی از عملگرها به تنهایی قابلیت ساختن یک g-قاب را دارند. در مرجع [۱۷]، مفهوم g-قاب‌های تنها تعریف شده‌اند و برای نام بردن از این دسته از عملگرها در مطالعه حاضر از عنوان s-g-قاب‌ها استفاده می‌شود. عملگر خطی و کران‌دار $\Lambda : H \longrightarrow K$ یک s-g-قاب است اگر ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند که برای هر $f \in H$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$A\|f\|^2 \leq \|\Lambda f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

یک s-g-قاب Λ یک s-g-پایه‌ریس است اگر عملگر Λ معکوس‌پذیر باشد و s-g-قاب Λ یک s-g-پایه متعامد یکه است اگر Λ عملگری یکانی باشد. عملگر قاب متناظر با یک s-g-قاب Λ با

[9] Hilbert space

S_Λ نمایش داده می‌شود و با ضابطه $S_\Lambda = \Lambda^*\Lambda$ تعریف می‌گردد. S_Λ یک عملگر خطی، کران‌دار، الحاق‌پذیر، مثبت و معکوس‌پذیر است. مشابه حالت g-قاب‌ها، دوگان کانونی نیز برای هر g-s-قاب به‌وسیله عملگر قاب آن القا می‌شود و g-s-قاب ΛS_Λ^{-1} را دوگان کانونی نامیده و با $\widetilde{\Lambda}$ نمایش داده می‌شود. همچنین g-s-قاب Γ را دوگان Λ می‌نامند هرگاه رابطه $\Gamma^*\Lambda = I_H$ برقرار باشد.

از تعریف g-s-قاب Λ سریعا نتایجی در خصوص خواص عملگر Λ به‌دست می‌آید. با توجه به $\|\Lambda\| = \|\Lambda^*\|$، عملگر Λ^* نیز یک g-s-قاب با همان کران‌های g-s-قاب Λ است.

مرجع [۱۷]، پس از بیان مفهوم g-s-قاب، ارتباط دو مفهوم g-قاب و g-s-قاب را مطرح می‌نماید. به وسیله عملگر تجزیه یک g-قاب می‌توان دید که هر g-قاب یک g-s-قاب با همان کران است. این نوع رابطه بحث در خصوص g-قاب‌ها را راحت تر می‌نماید. در بخش‌های آتی ابتدا به بررسی خواص عملگرضربی‌ساز g-s-قاب‌ها پرداخته و سپس با استفاده از رابطه مطرح شده نتایج مشابه در خصوص عملگر g-قاب‌ها به دست می‌آید.

۲. g-s -قاب‌ها و شرایط معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز آنها

عملگر ضربی‌ساز قابها در مراجع مختلف مورد توجه محققین بسیاری بوده و با توجه به اهمیت این عملگر در مسائل کاربردی، ویژگی‌های آن از جنبه‌های مختلف مورد تحقیق قرار می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این عملگر معکوس‌پذیری آن و یافتن ضابطه صریحی برای عملگر معکوس آن است. در این بخش، معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز متناظر با دو g-s-قاب مورد هدف می‌باشد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید Λ و Γ دو g-s-قاب برای H نسبت به K بوده و α عددی ثابت باشد. عملگر ضربی‌ساز g-s-قاب‌های Λ و Γ و ثابت α با ضابطه زیر تعریف شده و با نماد $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ نشان داده می‌شود.

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma} f = \alpha\Lambda^*\Gamma f, \qquad \forall f \in H.$$

از تعریف عملگر ضربی‌ساز g-s-قاب‌ها واضح است که این عملگر خوش‌تعریف و کران‌دار است. البته توجه شود که شرط کافی برای خوش‌تعریفی و کران‌داری این عملگر، g-s-بسل بودن Λ و Γ بوده و این خواص اولیه از عملگر ضربی‌ساز را کفایت می‌کنند.

در بحث عملگر ضربی‌ساز قاب‌ها نکته بسیار مهم وجود خاصیت معکوس‌پذیری این عملگر و در صورت وجود این ویژگی یافتن ضابطه عملگر معکوس است. ازاین‌رو، در طول این مطالعه تاکید بر خاصیت معکوس‌پذیری بوده و از ذکر خواص دیگر عملگر ضربی‌ساز مانند کران‌داری صرفنظر می‌شود. (توجه شود که خاصیت کران‌داری همان‌طور که در پاراگراف قبل بیان شد حتی برای یک جفت g-s-بسل نیز وجود دارد.) ابتدا معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز متناظر با g-s-قاب‌ها در حالت‌های خاص بررسی می‌شود.

نکته ۲.۲. فرض کنید Λ یک g-s-قاب و α عددی ثابت باشند. آنگاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.

الف. عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Lambda}$، مضرب α از عملگر S_Λ بوده و بنا به خواص عملگر قاب g-s-قاب Λ معکوس‌پذیر می‌باشد.

ب. برای g-s-قاب‌های Λ و $\widetilde{\Lambda}$ و ثابت α، عملگرهای ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\widetilde{\Lambda}}$ و $\mathcal{M}_{\alpha,\widetilde{\Lambda},\Lambda}$ معکوس‌پذیر می‌باشند. زیرا این عملگرها مضرب α از عملگر همانی بر H هستند.

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\widetilde{\Lambda}} = \alpha\Lambda^*\widetilde{\Lambda} = \alpha\Lambda^*\Lambda S_\Lambda^{-1} = \alpha S_\Lambda S_\Lambda^{-1} = \alpha I_H.$$

ج. نتیجه مطرح شده در قسمت ب برای تمامی دوگان‌های دیگر Λ نیز برقرار است. به‌عبارت دیگر، عملگرهای ضربی‌ساز g-s-قاب‌های Λ و Γ و ثابت α، که در آن Γ دوگان دلخواهی از Λ است، مضرب ثابت α از عملگر همانی بوده و معکوس‌پذیر می‌باشد.

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma} = \alpha\Lambda^*\Gamma = \alpha I_H = \alpha\Gamma^*\Lambda = \mathcal{M}_{\alpha,\Gamma,\Lambda}.$$

در حالت کلی، عملگر ضربی‌ساز متناظر با دو g-s-قاب لزوما معکوس‌پذیر نیست و یا در صورت معکوس‌پذیری، ضابطه عملگر معکوس آن به‌راحتی قابل محاسبه نبوده و یا در مسایل کاربردی قابل دسترس و استفاده نیست. با توجه به این مطلب، مطالعه و یافتن شرایطی که تحت آن شرایط عملگر ضربی‌ساز معکوس‌پذیر بوده و مهم‌تر از آن ضابطه عملگر معکوس براحتی در اختیار باشد برای تحقیق اهمیت پیدا می‌کند. اکنون برخی از شرایط برای معکوس‌پذیری و یافتن عملگر معکوس یک عملگر ضربی‌ساز ارائه می‌شود.

قضیه ۳.۲. *برای دو s-g-قاب Λ و Γ و عدد ثابت α، اگر $R(\Lambda) \subseteq R(\Gamma)$، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ دارای معکوس راست به صورت عملگر ضربی‌ساز متناظر با s-g-بسل $(\Gamma^{-1})^*$ و s-g-قاب $\widetilde{\Lambda}$ و عدد ثابت α^{-1}، یعنی $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Gamma^{-1})^*,\widetilde{\Lambda}}$ می‌باشد.*

اثبات. با توجه به تعریف s-g-قاب Γ با کران‌های A_Γ و B_Γ، برای هر $f \in H$ داریم.

$$A_\Gamma\|f\|^2 \leq \|\Gamma f\|^2 \leq B_\Gamma\|f\|^2.$$

با استفاده از طرف چپ نامساوی فوق نتیجه می‌شود Γ یک عملگر یک به یک است. همچنین از طرفین این نامساوی نتیجه می‌شود $R(\Gamma)$ بسته است. چون Γ کران‌دار بوده، پس عملگرهای Γ^{-1} و $(\Gamma^{-1})^*$ نیز کران‌دار بوده و در نتیجه $(\Gamma^{-1})^*$ یک s-g-بسل برای H نسبت به $R(\Gamma)$ می‌باشد. از طرفی چون $R(\Lambda) \subseteq R(\Gamma)$، در نتیجه عملگر $\Gamma^{-1}\widetilde{\Lambda}$ خوش‌تعریف و کران‌دار بر H می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم $\alpha^{-1}\Gamma^{-1}\widetilde{\Lambda}$ یک معکوس راست برای $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ بر H خواهد بود.

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Gamma^{-1})^*,\widetilde{\Lambda}} = (\alpha\Lambda^*\Gamma)(\alpha^{-1}\Gamma^{-1}\widetilde{\Lambda}) = \Lambda^*\Gamma\Gamma^{-1}\Lambda S_\Lambda^{-1} = I_H.$$

توجه شود که $\Gamma\Gamma^{-1} = I$ بر $R(\Gamma)$ می‌باشد. □

گزاره ۴.۲. *فرض کنید Λ و Γ دو s-g-قاب و α عددی ثابت باشند. اگر Λ و Γ عملگرهای پوشایی باشند، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن به صورت عملگر ضربی‌ساز متناظر با s-g-قاب‌های $(\Gamma^{-1})^*$ و $(\Lambda^{-1})^*$ و عدد ثابت α^{-1} می‌باشد؛ به‌عبارت دیگر،*

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}^{-1} = \mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Gamma^{-1})^*,(\Lambda^{-1})^*}.$$

اثبات. از تعریف s-g-قاب‌های Λ و Γ (طرف چپ نامساوی در تعریف) نتیجه می‌شود این دو عملگر یک به یک و از پایین کران‌دار هستند. پس عملگرهای Λ، Γ، Λ^* و Γ^* همگی معکوس‌پذیر بوده‌اند و به‌علاوه، هر دو Λ^* و Γ^* یک s-g-قاب تشکیل خواهند داد. آن‌گاه عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma} = \alpha\Lambda^*\Gamma$ نیز معکوس‌پذیر بوده و به‌راحتی می‌توان دید عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Gamma^*)^{-1},(\Lambda^*)^{-1}}$ معکوس آن می‌باشد. □

در قضایای آتی به مطالعه عملگر ضربی‌ساز حاصل از یک g-s-قاب و انتقال یک g-s-قاب به‌وسیله یک عملگر معکوس‌پذیر و کران‌دار پرداخته می‌شود. می‌توان قضایای ارائه شده فوق را نیز به عنوان حالت خاصی از قضیه‌های زیر در نظر گرفت.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید Λ و Γ دو g-s-قاب و α عددی ثابت باشند. اگر Q یک عملگر معکوس‌پذیر و کران‌دار با شرط $(Q^*)^{-1}(R(\Gamma)) \subseteq R(\Lambda)$ باشد، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز متناظر با g-s-قاب‌های $Q\Gamma$ و Λ یعنی $\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda}$ از راست معکوس‌پذیر بوده و معکوس راست آن به صورت عملگر ضربی‌ساز متناظر با g-s-بسل $(\Lambda^{-1})^*$ و g-s-قاب $(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}$ و عدد ثابت α^{-1} ، یعنی $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}}$ می‌باشد. به‌علاوه، اگر Γ عملگری پوشا باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda}$ معکوس‌پذیر با عملگر معکوس*

$$\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}}$$

می‌باشد.

اثبات. با توجه به فرض، عملگر $\Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\Gamma$ خوش‌تعریف می‌باشد. همچنین بنا به تعریف g-s-قاب Λ، عملگر Λ^{-1} موجود و بر $R(\Lambda)$ خوش‌تعریف و کران‌دار بوده و $(\Lambda^{-1})^*$ تشکیل یک g-s-بسل می‌دهد. حال عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}}$ یک معکوس راست برای عملگر ضربی‌ساز متناظر با $Q\Gamma$ و Λ است. زیرا

$$\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda}\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}} = (Q\Gamma)^*\Lambda\Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma} = \Gamma^*Q^*(Q^{-1})^*\Gamma S_\Gamma^{-1} = I_H.$$

برای دیدن قسمت پایانی، کافی است از معکوس‌پذیری Γ استفاده نمود.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}}\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda} &= \Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}(Q\Gamma)^*\Lambda \\
&= \Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\Gamma S_\Gamma^{-1}\Gamma^*Q^*\Lambda \\
&= \Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\Gamma(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*Q^*\Lambda \\
&= \Lambda^{-1}(Q^{-1})^*\Gamma\Gamma^{-1}(\Gamma^*)^{-1}\Gamma^*Q^*\Lambda = I_H.
\end{aligned}$$

روابط فوق نشان می‌دهند $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,(Q^{-1})^*\widetilde{\Gamma}}$ معکوس چپی برای عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda}$ است. $\square$

قضیه ۶.۲. *برای دو g-s-قاب Λ و Γ و عدد ثابت α، اگر Q عملگری معکوس‌پذیر و کران‌دار باشد به‌طوری‌که $Q^{-1}(R(\Gamma)) \subseteq R(\Lambda)$، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز متناظر با g-s-قاب‌های $Q\Lambda$ و Γ و ثابت α یعنی $\mathcal{M}_{\alpha,\Gamma,Q\Lambda}$ از راست معکوس‌پذیر بوده و معکوس راست آن به صورت عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},((Q\Lambda)^{-1})^*,\widetilde{\Gamma}}$ می‌باشد.*

به‌علاوه، در صورت پوشایی Λ، عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,\Gamma,Q\Lambda}$ معکوس‌پذیر بوده و دارای عملگر معکوس به‌صورت عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},((Q\Lambda)^*)^{-1})^*,\widetilde{\Gamma}}$ می‌باشد.

۳. عملگر ضربی‌ساز g-s-پایه‌های ریس

نویسندگان در مرجع [۱۷]، به معرفی g-s-پایه‌های ریس پرداخته و ارتباط آنها را با g-پایه‌های ریس مطالعه می‌نمایند. در اینجا وابتدا تعریف g-s-پایه‌های ریس از این مرجع یادآوری شده و سپس به بررسی ضربی‌ساز آنها می‌پردازیم. در این بخش، Λ و Γ عملگرهایی از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K می‌باشند.

یک g-s-قاب Λ را یک g-s-پایه‌ریس می‌نامند هرگاه Λ عملگری معکوس‌پذیر باشد. باتوجه به تعریف g-s-قاب دیدیم که لزوما عملگری یک به یک بوده و دارای برد بسته است. پس هر g-s-قاب در صورت پوشایی یک g-s-پایه‌ریس تشکیل می‌دهد. باتوجه به ارتباط مطرح شده بین g-s-قاب‌ها و g-s-پایه‌های ریس می‌توان نتایج حاصل در بخش قبل را که برای g-s-قاب‌های پوشا مطرح شده بودند، برای g-s-پایه‌های ریس مطرح نمود و بااین تعبیر نتایج به شکل زیر قابل طرح هستند.

نتیجه ۱.۳. *عملگر ضربی‌ساز g-s-پایه‌های ریس همواره معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن نیز یک عملگر ضربی‌ساز g-s-پایه‌های ریس می‌باشد. به عبارت دیگر برای g-s-پایه‌های ریس Λ و Γ و ثابت α، همواره عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,\Gamma,\Lambda}$ معکوس‌پذیر با عملگر معکوس $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Gamma^{-1})^*,(\Lambda^{-1})^*}$ است.*

نتیجه ۲.۳. *اگر Γ یک g-s-پایه‌ریس، Λ یک g-s-قاب، Q یک عملگر معکوس‌پذیر و کران‌دار و عدد ثابت α باشند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.*

الف. عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,Q\Gamma,\Lambda}$ معکوس‌پذیر بوده و دارای عملگر معکوس $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},(\Lambda^{-1})^*,((Q\Gamma)^{-1})^*}$ می‌باشد.

ب. عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,Q\Gamma}$ معکوس‌پذیر بوده و دارای عملگر معکوس $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},((Q\Gamma)^{-1})^{*},\widetilde{\Lambda}}$ می‌باشد.

در نتیجه اخیر از شکل خاص دوگان کانونی یک g-s-پایه‌ریس استفاده شده است. دوگان کانونی $\widetilde{\Gamma}$ از یک g-s-پایه‌ریس Γ برابر $(\Gamma^{*})^{-1}$ می‌باشد. زیرا

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma S_{\Gamma}^{-1} = \Gamma(\Gamma^{*}\Gamma)^{-1} = \Gamma\Gamma^{-1}(\Gamma^{*})^{-1} = (\Gamma^{*})^{-1}.$$

اما، ویژگی‌های خاص‌تری از یک عملگر دسته دیگری از عملگرها تحت عنوان مفهوم g-s-پایه‌های متعامد یکه را برجسته می‌نماید. در مرجع [۱۷]، این دسته از عملگرها معرفی شده‌اند. یک g-s-قاب Λ را یک g-s-پایه متعامد یکه گویند هرگاه Λ یک عملگر یکانی باشد. دراین‌صورت عملگر قاب S_{Λ}، عملگر همانی بوده و دوگان استاندارد $\widetilde{\Lambda}$ برابر با Λ است. زیرا

$$S_{\Lambda} = \Lambda^{*}\Lambda = I_{H} \quad , \quad \widetilde{\Lambda} = \Lambda S_{\Lambda}^{-1} = \Lambda.$$

نتایج فوق شرایط به‌دست آمده برای معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز g-s-قاب‌ها را به شکل بسیار صریح‌تری برای عملگر ضربی‌ساز g-s-پایه‌های متعامد یکه موجب می‌شود. در زیر به مرور آنها پرداخته که به‌راحتی از خواص بیان شده برای g-s-پایه‌های متعامد یکه به‌دست می‌آیند.

نتیجه ۳.۳. *اگر Λ یک g-s-پایه متعامد یکه، Γ یک g-s-قاب و عدد ثابت α باشند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.*

الف. عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Lambda}$ مضرب α از عملگر همانی است.

ب. عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Gamma,\Lambda}$ همواره معکوس‌پذیر است و دارای معکوسی به‌صورت $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},\Lambda,\widetilde{\Gamma}}$ می‌باشد.

ج. عملگر ضربی‌ساز متناظر با دو g-s-پایه متعامد یکه Λ و Γ همواره معکوس‌پذیر بوده و دارای معکوسی به‌صورت عملگر ضربی‌ساز Γ و Λ است؛

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}^{-1} = \mathcal{M}_{\alpha^{-1},\Gamma,\Lambda}.$$

گزاره ۴.۳. *فرض کنید Λ یک s-g-پایه متعامد یکه و Γ یک s-g-قاب و عدد ثابت α باشند. آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر Γ یک s-g-پایه‌ریس باشد.*

اثبات. بنا به قسمت ب نتیجه ۳.۳، اگر Γ یک s-g-پایه‌ریس باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ معکوس‌پذیر بوده و دارای معکوسی به‌صورت عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{\alpha^{-1},\tilde{\Gamma},\Lambda}$ است. اما برای بررسی طرف برعکس قضیه، فرض کنید عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}$ معکوس‌پذیر بوده و دارای عملگر معکوس Ω است. آن‌گاه

$$\mathcal{M}_{\alpha,\Lambda,\Gamma}\Omega = \alpha\Lambda^*\Gamma\Omega = I_H,$$

از یکانی بودن Λ نتیجه می‌شود،

$$\Gamma = \alpha^{-1}\Lambda\Omega^{-1},$$

که نشان می‌دهد Γ عملگری معکوس‌پذیر بوده و در نتیجه Γ یک s-g-پایه‌ریس است. □

۴. معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز g-قاب‌ها

دراین قسمت با یک دنباله نیم‌نرمال $m = \{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ سروکار داریم. دنباله m با خاصیت $0 < \inf\{|m_i|\}_{i\in\mathbb{N}} \leq \sup\{|m_i|\}_{i\in\mathbb{N}} < \infty$ یک دنباله نیم‌نرمال نامیده می‌شود. حال اگر $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک g-قاب برای H نسبت به $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ با کران‌های A_Λ و B_Λ باشد، آن‌گاه $m\Lambda = \{m_i\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ نیز یک g-قاب با کران‌های $\inf\{|m_i|^2\}_{i\in\mathbb{N}}A_\Lambda$ و $\sup\{|m_i|^2\}_{i\in\mathbb{N}}B_\Lambda$ می‌باشد.

اکنون عملگرهای تجزیه و ترکیب متناظر با g-قاب $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای H نسبت به $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیریم [۱۹].

$$\Theta_\Lambda : H \longrightarrow \oplus_{i\in\mathbb{N}}K_i \quad ; \quad \Theta_\Lambda(f) = \{\Lambda_i f\}_{i\in\mathbb{N}},$$

$$\Theta^*_\Lambda : \oplus_{i\in\mathbb{N}}K_i \longrightarrow H \quad ; \quad \Theta^*_\Lambda(\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Lambda^*_i g_i.$$

خواص اولیه این عملگرها در فضاهای مختلف بخصوص فضاهای هیلبرت مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱۵]، [۱۹]. عملگر Θ_Λ کران‌دار، یک‌به‌یک و دارای برد بسته است و عملگر Θ^*_Λ کران‌دار و پوشا می‌باشد.

در [۱۶]، نویسنده به معرفی مفهوم عملگر ضرب‌ساز متناظر با دو g-قاب پرداخته و برخی از خواص این عملگر را مطالعه می‌نماید. البته در این مقاله ابتدا به بررسی خوش‌تعریفی و کران‌داری عملگر ضرب‌ساز پرداخته شده و پس از آن تمرکز بر یافتن شرایطی است که تحت آن شرایط این عملگر فشرده بوده و همچنین عملگر ضرب‌ساز در کلاس عملگرهای شتل [۱۰] قرار می‌گیرد. در پایان رابطه عملگر ضرب‌ساز g-قاب‌های هم‌ارز ارائه می‌گردد. باتوجه به تعریف عملگر ضرب‌ساز g-قاب‌ها ارایه شده در [۱۶]، عملگر ضرب‌ساز متناظر با دو g-قاب Λ و Γ و دنباله نیم‌نرمال m با استفاده از عملگرهای ترکیب و تجزیه دو g-قاب Λ و Γ، به‌ترتیب، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma} = \sum_{i\in\mathbb{N}} m_i\Lambda_i^*\Gamma_i = \Theta_\Lambda^*\Theta_{m\Gamma}. \tag{۱.۴}$$

دقت شود در تساوی آخر از این نکته استفاده شده که $m\Gamma$ یک g-قاب با عملگر تجزیه $\Theta_{m\Gamma}$ است.

برای ادامه بحث بر g-قاب‌ها و ضرب‌ساز آن‌ها از عملگر $D_m : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ متناظر با یک دنباله $m = \{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ با ضابطه $D_m\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \{m_ia_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ استفاده می‌شود و عملگر ضرب‌ساز فوق با استفاده از این عملگر به‌صورت $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma} = \Theta_\Lambda^* D_m\Theta_\Gamma$ به‌دست خواهد آمد.

در مطالعه [۱۷]، نویسندگان پس از معرفی s-g-قاب‌ها، نشان می‌دهند خانواده s-g-قاب‌ها در تناظر با خانواده تمامی g-قاب‌ها می‌باشند. برای استدلال این قسمت متناظر با هر g-قاب $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک s-g-قاب در نظر گرفته می‌شود. این عملگر که به‌عنوان s-g-قاب متناظر با یک g-قاب معرفی می‌شود همان عملگر تجزیه Θ_Λ می‌باشد. فرض کنید B_Λ و A_Λ کران‌های g-قاب Λ هستند. آن‌گاه برای $f\in H$ رابطه زیر برقرار است.

$$A_\Lambda\|f\|^2 \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i f\|^2 \le B_\Lambda\|f\|^2.$$

حال برای $f \in H$ بنا به تعریف عملگر تجزیه، رابطه $\Theta_\Lambda(f) = \{\Lambda_i f\}_{i\in\mathbb{N}}$ برقرار بوده و در نتیجه

[10] Schatten

$\|\Theta_\Lambda f\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\Lambda_i f\|^2$. پس داریم،

$$A_\Lambda\|f\|^2 \leq \|\Theta_\Lambda f\|^2 \leq B_\Lambda\|f\|^2.$$

مشاهده می‌شود که نامساوی فوق s-g-قاب بودن Θ_Λ را نشان می‌دهد.

دیگر مشخصات g-قاب Λ و s-g-قاب Θ_Λ نیز دارای ارتباط قابل توجه و تاملی برای ادامه بحث می‌باشند. اگر عملگر قاب s-g-قاب Θ_Λ با S_{Θ_Λ} نمایش داده شود، آن‌گاه

$$S_{\Theta_\Lambda} = \Theta_\Lambda^*\Theta_\Lambda = S_\Lambda,$$

به‌عبارت دیگر عملگر قاب Λ و Θ_Λ یکسان خواهند بود. دوگان‌های کانونی g-قاب Λ و s-g-قاب Θ_Λ نیز دارای رابطه زیر هستند. همچنین

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_\Lambda(f) = \Theta_\Lambda S_{\Theta_\Lambda}^{-1}(f) &= \Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1}(f)\\ &= \{\Lambda_i(S_\Lambda^{-1}(f))\}_{i\in\mathbb{N}}\\ &= \{\Lambda_i S_\Lambda^{-1}(f)\}_{i\in\mathbb{N}}\\ &= \{\widetilde{\Lambda}_i(f)\}_{i\in\mathbb{N}} = \Theta_\Lambda(f), \quad \forall f\in H.\end{aligned}$$

اکنون می‌توان با استفاده از نتایج مطرح شده در بخش دوم و ارتباط به‌دست آمده بین ضربی‌ساز g-قاب‌ها و عملگرهای ترکیب و تجزیه g-قاب‌های مورد بحث و همچنین روابط بیان شده بین g-قاب‌ها و s-g-قاب‌ها، بررسی شرایط کافی برای معکوس‌پذیر عملگر ضربی‌ساز g-قاب‌ها را آغاز نمود.

گزاره ۱.۴. *اگر $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک g-پایه‌ریس باشد، آن‌گاه عملگر تجزیه متناظر آن یعنی Θ_Γ یک عملگر معکوس‌پذیر بوده و $\Theta_{\widetilde{\Gamma}} = (\Theta_\Gamma^{-1})^*$.*

اثبات. چون Γ یک g-پایه‌ریس با کران‌های B_Γ و A_Γ می‌باشد، پس برای هر دنباله متناهی $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$،

$$A_\Gamma\sum_{i\in\mathbb{N}}\|g_i\|^{۲}\leq\|\sum_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i^*g_i\|^{۲}\leq B_\Gamma\|\sum_{i\in\mathbb{N}}g_i\|^{۲}.$$

پس عملگر ترکیب دنباله Γ یعنی Θ_Γ^* در نامساوی زیر برای $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ صدق می‌کند.

$$A_\Gamma\sum_{i\in\mathbb{N}}\|g_i\|^{۲}\leq\|\Theta_\Gamma^*g_i\|^{۲}\leq B_\Gamma\sum_{i\in\mathbb{N}}\|g_i\|^{۲},$$

که نشان می‌دهد Θ_Γ^* عملگری از پایین کران‌دار است. از پایین کران‌داری Θ_Γ^* نتیجه می‌دهد عملگر Θ_Γ عملگری پوشا بوده و $\Theta_\Gamma^{-۱}$ به‌عنوان معکوس عملگر Θ_Γ، موجود خواهد بود. آنچه در قضیه ۳.۲ به‌دست آمد و روابط بین g-قاب‌ها و s-g-قاب‌ها بیان می‌کنند که $(\Theta_\Gamma^{-۱})^*$ که در ضابطه معکوس عملگر $\mathcal{M}_{\alpha,\Theta_\Lambda,\Theta_\Gamma}$ نقش ایفا می‌کند، یک g-قاب القا می‌نماید که همان دوگان استاندارد Γ خواهد بود. برای دیدن این موضوع برای هر $i\in\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $\Omega_i:H\longrightarrow K_i$ با ضابطه $\Omega_i(f)=\{\pi_i(\Theta_\Gamma^{-۱})^*f\}_{i\in\mathbb{N}}$، که در آن π_i، برای هر i، تصویر استاندار از $\oplus_{j\in\mathbb{N}}K_j$ به روی K_i است. ابتدا می‌بینیم $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک دوگان برای $\{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ است. برای این منظور، $f\in H$ را در نظر می‌گیریم. آنگاه ،

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i^*\Omega_if=\Theta_\Gamma^*\{\Omega_if\}_{i\in\mathbb{N}}=\Theta_\Gamma^*(\Theta_\Gamma^{-۱})^*f=f.$$

اکنون از منحصربفردی دوگان برای یک g-پایه‌ریس [۱۳]، نتیجه می‌شود $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برابر دوگان استاندارد $\widetilde{\Gamma}=\{\widetilde{\Gamma}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ بوده و در نتیجه عملگر $(\Theta_\Gamma^{-۱})^*$ نیز همان عملگر تجزیه $\widetilde{\Gamma}$ است. بنابراین

$$\Theta_\Gamma S_\Gamma^{-۱}=\Theta_{\widetilde{\Gamma}}=(\Theta_\Gamma^{-۱})^*,$$

و به این ترتیب برهان کامل می‌گردد. $\square$

با توجه به شناخت ایجاد شده، می‌توان عملگر ضربی‌ساز دو g-قاب Λ و Γ را برحسب عملگر ضربی‌ساز دو s-g-قاب Θ_Λ و Θ_Γ به‌صورت زیر نوشت. از رابطه (۱.۴) و تعریف عملگر ضربی‌ساز

s-g-قاب‌ها رابطه مهم زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma} = \Theta_\Lambda^* \Theta_{m\Gamma} = \mathcal{M}_{1,\Theta_\Lambda,\Theta_{m\Gamma}}.$$

اکنون مقدمات لازم برای ورود به بحث معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز را به‌دست آورده‌ایم و به کمک نتایج ارائه شده در بخش دوم به بررسی معکوس‌پذیری عملگر ضربی‌ساز g-قاب‌ها می‌پردازیم. از استدلال نتایجی که مستقیما از قضایای به‌دست آمده در بخش دوم و روابط مطرح شده حاصل می‌شوند خودداری می‌نماییم.

گزاره ۲.۴. *فرض کنید $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ دو g-قاب برای H نسبت به K_iها با عملگرهای تجزیه Θ_Λ و Θ_Γ، به‌ترتیب، باشند. برای دنباله نیم‌نرمال m، اگر $R(\Theta_\Lambda) \subseteq R(\Theta_\Gamma)$، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}$ از راست معکوس‌پذیر بوده و دارای عملگر معکوس راست به‌صورت $\mathcal{M}_{1,\Theta^*_{(m\Gamma)^{-1}},\Theta_{\widetilde{\Lambda}}}$ است.*

قضیه ۳.۴. *برای دو g-قاب $\Lambda = \{\Lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای H نسبت به K_iها و دنباله نیم‌نرمال m، گزاره‌های زیر برقرار هستند.*

الف. اگر Γ یک g-پایه‌ریس باشد، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}$ دارای معکوس راست بوده و معکوس راست آن عملگر ضربی‌ساز متناظر با دنباله m^{-1} و g-پایه‌ریس $\widetilde{\Gamma}$ و g-قاب $\widetilde{\Lambda}$ است.

ب. اگر Λ یک g-پایه‌ریس باشد، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}$ از چپ معکوس‌پذیر بوده و معکوس چپ آن به‌صورت $\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Lambda}}$ است.

ج. اگر Λ و Γ دو g-پایه‌ریس باشند، آن‌گاه عملگر ضربی‌ساز g-پایه‌های ریس $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}$ معکوس‌پذیر بوده و معکوس آن عملگر ضربی‌ساز g-پایه‌های ریس $\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Lambda}}$ است.

اثبات. الف. حال برای عملگر ضربی‌ساز متناظر با g-قاب Λ و g-پایه‌ریس Γ به‌راحتی می‌توان دید

عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Lambda}}$ معکوس راست آن است. زیرا

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Lambda}} &= \Theta_\Lambda^*\Theta_m\Gamma\Theta_{\widetilde{\Gamma}}^*\Theta_{m^{-1}\widetilde{\Lambda}}\\ &= \Theta_\Lambda^* D_m\Theta_\Gamma(\Theta_\Gamma S_\Gamma^{-1})^* D_{m^{-1}}\Theta_{\widetilde{\Lambda}}\\ &= \Theta_\Lambda^* D_m\Theta_\Gamma S_\Gamma^{-1}\Theta_\Gamma^* D_{m^{-1}}\Theta_{\widetilde{\Lambda}}\\ &= \Theta_\Lambda^* D_m\Theta_\Gamma(\Theta_\Gamma^*\Theta_\Gamma)^{-1}\Theta_\Gamma^* D_{m^{-1}}(\Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1})\\ &= \Theta_\Lambda^* D_m\Theta_\Gamma\Theta_\Gamma^{-1}(\Theta_\Gamma^*)^{-1}\Theta_\Gamma^* D_{m^{-1}}\Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1} = I_H.\end{aligned}$$

ب. مشابه قسمت الف استدلال می‌شود.

ج. استدلال خاصیت معکوس چپ بودن و معکوس راست بودن مشابه قسمت‌های قبل انجام می‌شود فقط در این قسمت پوشایی Θ_Λ به خواص این عملگر اضافه شده که معکوس‌پذیری آن را نتیجه داده و آن‌گاه $(\Theta_\Lambda^*\Theta_\Lambda)^{-1} = \Theta_\Lambda^{-1}(\Theta_\Lambda^*)^{-1}$ و ترکیب چپ عملگر $\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma},\widetilde{\Lambda}}$ با عملگر $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma}$ را امکان‌پذیر نموده و این ترکیب عملگر همانی را حاصل می‌نماید.

□

قضیه ۳.۴ برهان برخی از قضایای مطرح شده در مراجع [۱۲] و [۱۸] را بسیار راحت نموده و می‌توان آنان را به عنوان نتایجی از قضیه فوق در نظر گرفت.

قضیه ۴.۴. *اگر Λ یک g-قاب، Γ یک g-پایه‌ریس و Q یک عملگر معکوس‌پذیر و کران‌دار بر H باشند، آن‌گاه معکوس راست عملگر ضربی‌ساز $\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma Q}$ به‌صورت $\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma}(Q^{-1})^*,\widetilde{\Lambda}}$ است.*

اثبات. از گزاره ۱.۴، در خصوص عملگر Θ_Γ، معکوس‌پذیری و ضابطه عملگر معکوس به صورت

$(\Theta_\Gamma^{-1})^* = \Theta_{\widetilde{\Gamma}} = \Theta_\Gamma S_\Gamma^{-1}$ به‌دست آمده و داریم،

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{m,\Lambda,\Gamma Q}\mathcal{M}_{m^{-1},\widetilde{\Gamma}(Q^{-1})^*,\widetilde{\Lambda}} &= \Theta_\Lambda^*\Theta_{m\Gamma Q}\Theta^*_{\widetilde{\Gamma}(Q^{-1})^*}\Theta_{m^{-1}\widetilde{\Lambda}} \\
&= \Theta_\Lambda^* D_m \Theta_\Gamma Q(\Theta_\Gamma S_\Gamma^{-1}(Q^{-1})^*)^* D_{m^{-1}}\Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1} \\
&= \Theta_\Lambda^* D_m \Theta_\Gamma Q Q^{-1} S_\Gamma^{-1}\Theta_\Gamma^* D_{m^{-1}}\Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1} \\
&= \Theta_\Lambda^* D_m \Theta_\Gamma \Theta_\Gamma^{-1}(\Theta_\Gamma^*)^{-1}\Theta_\Gamma^* D_{m^{-1}}\Theta_\Lambda S_\Lambda^{-1} = I_H.
\end{aligned}$$

اکنون نتیجه مورد نظر از روابط فوق حاصل می‌شود. □

مراجع

[1] A. Alijani, Generalized frames with C^*-valued bounds and their operator duals, *Filomat*, **29**(7) (2015), 1469–1479.

[2] A. Alijani and M.A. Dehghan, G-frames and their duals in Hilbert C^*-modules, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **38**(3) (2012), 567–580.

[3] P. Balazs, Basic definition and properties of Bessel multipliers, *J. Math. Anal. Appl.*, **325**(1) (2007), 571–585

[4] P.G. Casazza, The art of frame theory, *Taiwanese J. Math.*, **4**(2) (2000), 129–201.

[5] P.G. Casazza, D. Han, and D.R. Larson, Frames for Banach spaces, *Contemp. Math.*, **247** (1999), 149–182.

[6] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, *Contemp. Math.*, **345** (2004), 87–113.

[7] *O. Christensen*, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Second Edition Brikhouser, 2016.

[8] I. Daubechies, A. Grassman and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 1271–1283.

[9] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72**(2) (1952), 341–366.

[10] M. Frank and D.R. Larson, A module frame concept for Hilbert C*-modules, *Contemp. Math.*, **247** (2000), 207–233.

[11] C. Heil, D. Walnat, Countinous and discrete wavelet transforms, *SIAM Rev.*, **31**(4) (1989), 628–666.

[12] H. Javanshiri and M. choubin, Multipliers for von Neumann–Schatten Bessel sequences in separable Banach spaces, *Linear Algebra Appl.*, **545** (2018), 108–138.

[13] A. Khosravi and K. Musazadeh, Fusion frames and g–frames, *J. Math. Anal. Appl.*, **342**(2) (2008), 1068–1083.

[14] G.J. Murphy, *C^*-algebras and Operator Theory*, San Diego, California, Academic Press, 1990.

[15] A. Najati and A. Rahimi, Generalized frames in Hilbert spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **35**(1) (2009), 97–109.

[16] A. Rahimi, Multipliers of generalization frames in Hilbert spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **37**(1) (2011), 63–80.

[17] R. Raisi Tousi, R.A. Kamyabi Gol, S.H. Avazzadeh, On a new g-frame and duality, *Wavelets and Linear Algebra*, **5**(1) (2018), 1–9.

[18] M. Shamsabadi and A.A. Arefijamaal, The invertibility of fusion frame multipliers, *Linear Multilinear Algebra*, **65**(5) (2017), 1062–1072.

[19] W. Sun, G-frames and G-Riesz bases, *J. Math. Anal. Appl.*, **322**(1) (2006), 437–452.

[20] W. Sun, Stability of g-frames, *J. Math. Anal. Appl.*, **326**(2) (2007), 858–868.