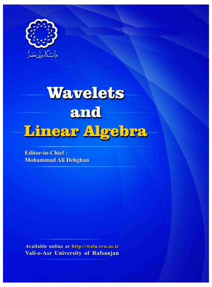
موجک‌ها و جبرخطی ۶(۱) (۱۳۹۸) ۱۹-۳۶



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

نمایش انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن از گروه حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم

فاطمه اسماعیل‌زاده*[آ]

[آ]گروه ریاضی، واحد بجنورد، دانشگاه آزاد اسلامی، بجنورد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۳۱ تیر ۱۳۹۷
پذیرفته شده: ۲۲ اسفند ۱۳۹۷
دسترسی آنلاین: ۱۰ شهریور ۱۳۹۸

ادیتور رابط: عطاءاله عسکری‌همت

چکیده

در این مقاله، ابتدا نمایش‌های انتگرال‌پذیر مربعی از فضاهای همگن نسبت به اندازه پایای نسبی معرفی می‌شود. سپس شرط لازم و کافی برای انتگرال‌پذیر مربعی از گروه حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم و فضای همگن این گروه‌ها نشان داده می‌شود. بنابراین ارتباط بین موجک‌های پذیرفتنی از این گروه‌ها و فضای همگن آن‌ها ارائه می‌گردد.

کلمات کلیدی:

فضای همگن، اندازه به‌طور نسبی پایا، گروه حاصل‌ضرب نیم مستقیم، نمایش انتگرال‌پذیر مربعی، موجک پذیرفتنی.

۱. مقدمه

رده ساختارهای جبری توپولوژیک غیرتعویض‌پذیر شامل رده وسیعی از ساختارهای جبری توپولوژیک است و آنالیز روی این ساختارها دارای اهمیت فراوان در حوزه‌های علوم ریاضی- فیزیک و مهندسی می‌باشد. حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های موضعاً فشرده و همچنین فضاهای همگن موضعاً فشرده متناظر با گروه‌های ناآبلی از این رده هستند. اغلب گروه‌ها را به صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم دو گروه موضعاً فشرده می‌توان نوشت و کاربرد آن‌ها درزمینه‌های ریاضی و فیزیک بسیار اساسی می‌باشد. گروه آفین و گروه هایزنبرگ مثال‌هایی از این گونه گروه‌ها می‌باشند. از آنجایی که اغلب گروه‌ها بسیار بزرگ می‌باشند و ممکن است نمایش‌های روی گروه‌ها انتگرال‌پذیر مربعی نباشند لذا برآن شدیم که زیرگروه‌هایی از آن‌ها را در نظرگرفته و با فضاهای همگن آن‌ها کار کنیم. فضاهای همگن در فیزیک کاربرد فراوان و بسزایی دارند. از جمله کره n-بعدی نیز مثالی از فضاهای همگن است که فضای همگن گروه ناآبلی $So(n)$ می‌باشد و نقش اساسی در ریاضی-فیزیک مدرن و همچنین در پردازش تصویر پزشکی و شبیه‌سازی پزشکی دارد. می‌توان در [۱] دیدگاههایی از تعمیم تبدیلات موجک پیوسته را بر فضاهای همگن G/H با در نظر گرفتن اندازه G-پایا دید. در [۲] تبدیلات موجک روی فضای همگن بوده است به‌طوری‌که فضای همگن G/H با اندازه به‌طور نسبی پایا در نظرگرفته می‌شود.

در این مقاله، ابتدا نمایش‌های انتگرال‌پذیر مربعی از فضاهای همگن نسبت به اندازه پایای نسبی و موجک‌هایی پذیرفتنی برای این گونه نمایش‌ها تعریف می‌شود. سپس ارتباط بین موجک‌های پذیرفتنی برای گروه‌های حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم و فضاهای همگن این گروه‌ها بررسی می‌شود.

۲. پیش‌نیازها

فرض کنید G گروهی شامل یک زیرگروه نرمال K و یک زیرگروه H باشد به‌طوری‌که $G = KH$ و $K \cap H = \{e\}$. برای هر $g_1, g_2 \in G$ عناصری مانند $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$g_1 g_2 = k_1 h_1 k_2 h_2 = (k_1 h_1 k_2 h_1^{-1})(h_1 h_2) = (k_1 k_2^{h_1})(h_1 h_2)$$

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: esmaeelzadeh@bojnourdiau.ac.ir (فاطمه اسماعیل‌زاده)،

http://doi.org/10.22072/wala.2019.90496.1186

برای هر $h \in H$ تعریف کنید :

$$\tau_h : K \to K; \quad \tau_h(k) = k^h.$$

در این صورت $\{\tau_h; h \in H\}$ یک خودریختی داخلی از گروه K است. فرض کنید K و H دو گروه و $h \mapsto \tau_h$ یک همریختی از گروه H به گروه خودریختی‌های K باشد. به عبارت دیگر $\tau_h o \tau_{h'} = \tau_{hh'}$. ضرب دکارتی H و K را با $K \times_\tau H$ نمایش می‌دهیم و برای هر $(k,h),(k',h')$ در $K \times_\tau H$ عمل زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(k,h).(k',h') = (k\tau_h(k'), hh'). \qquad (۱.۲)$$

در این‌صورت $K \times_\tau H$ یک گروه است. عنصر همانی این گروه (e_K, e_H) است که e_K عضو همانی گروه K و e_H عضو همانی H می‌باشد. عنصر معکوس (k,h) برابر با $(\tau_{h^{-1}}(k^{-1}), h^{-1})$ است.
در نظربگیرید $K = \{(k, e_H); k \in K\}$ و $H = \{(e_K, h); h \in H\}$. در این‌صورت K یک زیرگروه نرمال و H یک زیرگروه از $K \times_\tau H$ می‌باشند. فرض کنید K, H دو گروه هاسدورف موضعاً فشرده و $\tau : H \to Aut(K)$ یک همریختی باشد به‌طوری‌که نگاشت $(k,h) \to \tau_h(k)$ یک نگاشت پیوسته از $K \times H$ به روی K باشد. در این صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم[1] $K \times_\tau H$ نسبت به توپولوژی حاصل‌ضربی، یک گروه موضعاً فشرده می‌باشد. از این پس، عناصر $(k, e_H), (e_K, h)$ را به‌ترتیب با عناصر k, h نشان می‌دهیم.

اگر ρ_H و ρ_K به‌ترتیب اندازه هار راست بر K و H باشند، آنگاه اندازه حاصل‌ضربی $\rho_K \times \rho_H$ یک اندازه هار راست بر $K \times_\tau H$ است. هم‌چنین اگر λ_H, λ_K به‌ترتیب اندازه‌های هار چپ روی گروه‌های K, H باشند، دراین‌صورت اندازه هار چپ روی گروه $G = K \times_\tau H$ برابر است با:

$$d\lambda(k,h) = \delta(h) d\lambda_H(h) d\lambda_K(k),$$

[1] semidirect product

و تابع مدولی از $K \times_\tau H$ برابر است با:

$$\Delta_G(k,h) = \delta(h)\Delta_K(k)\Delta_H(h); \quad k \in K, h \in H.$$

بنابراین $\delta : H \to (\circ, \infty)$ یک همریختی است (برای جزئیات بیشتر به [۸، ۶] مراجعه کنید).
اکنون برای راحتی خواننده به مقدماتی درباره فضاهای همگن و اندازه روی این فضاها می‌پردازیم.

گروه موضعاً فشرده G و زیرگروه بسته H از آن را در نظر می‌گیریم. اندازه هار از گروه G و H را به ترتیب با dg و dh نمایش می‌دهیم. همچنین تابع‌های مدولی آنها را Δ_G و Δ_H می‌نامیم. فضای خارج قسمتی G/H را که G از چپ روی آن عمل می‌کند، فضای همگن [۲] می‌نامیم. یک اندازه رادون μ روی فضای همگن G/H را در نظر بگیرید. برای هر $g \in G$ و برای یک زیرمجموعه بورل E از G/H ، انتقالات μ_g از اندازه μ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_g(E) = \mu(gE).$$

اگر برای هر $g \in G$، $\mu_g = \mu$ آنگاه اندازه μ را G-پایا [۳] نامیم و اندازه μ به طور قوی شبه پایا[۴] نامیده می‌شود، اگر یک تابع پیوسته $\nu : G \times G/H \to (\circ, \infty)$ موجود باشد به‌قسمی‌که برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم:

$$d\mu_{g_۱}(g_۲H) = \nu(g_۱, g_۲H)d\mu(g_۲H).$$

اگر تابع $\nu(g,.)$ برای هر $g \in G$، به یک ثابت تقلیل یابد آنگاه μ را به‌طورنسبی پایا [۵] گوییم. یک

[2]homogeneous space
[3]G-invariant
[4] strongly quasi-invariant
[5]relatively invariant

رو-تابع [6] برای زوج (G,H) یک تابع پیوسته $\rho : G \to (0,\infty)$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که

$$\rho(gh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\rho(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

قضیه ۱.۲. *[۴، قضیه ۵۴.۲] فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H زیرگروه بسته از آن باشد. در این‌صورت هر زوج (G,H) یک رو-تابع می‌پذیرد.*

هم‌چنین در [۴، قضیه ۵۶.۲] نشان داده شده است که برای هر رو تابع ρ، یک اندازه به طور قوی شبه پایای μ بر G/H وجود دارد که در تساوی زیر صدق می کند:

$$\frac{d\mu_{g_1}}{d\mu}(g_2H) = \frac{\rho(g_1g_2)}{\rho(g_2)},$$

که $g_1, g_2 \in G$.

به‌علاوه در [۶، لم ۳.۲] نشان داده شده است که هر گاه μ یک اندازه به‌طور نسبی پایا باشد که از رو تابع ρ به دست آمده باشد در این‌صورت

$$d\mu_g = \frac{\rho(g)}{\rho(e)}d\mu, \qquad (۲.۲)$$

که $g \in G$.

از طرفی در [۸، قضیه ۶.۴.۳] نشان داده شده است، اگر μ یک اندازه به‌طورقوی شبه پایا روی G/H باشد که از رو-تابع ρ القا شده باشد ، آنگاه برای هر $f \in L^1(G)$ شرایط زیر برقرار است:

- یک زیرمجموعه E از G/H با اندازه صفر موجود است به‌طوری‌که برای هر $g \in G$ و E $q(g) \notin$ نگاشت $h \mapsto \frac{f(gh)}{\rho(gh)}$ در $L^1(H)$ قرار دارد.
- تابع $gH \mapsto \int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)}\,dh$ تقریبا همه‌جا تعریف شده روی G/H ، انتگرال‌پذیر است.

---
[6] ρ-function

• $\int_{G/H}\int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)}\,dh\,d\mu(gH) = \int_G f(g)\,dg.$

هم‌چنین نگاشت $T : L^1(G) \mapsto L^1(G/H)$ تعریف شده به‌صورت زیر یک نگاشت خطی کراندار و پوشا است.

$$Tf(gH) = \int_H \frac{f(gh)}{\rho(gh)}\,dh \quad (gH \in G/H) \tag{۳.۲}$$

(برای دیدن جزئیات روابط فوق به [۸، بخش ۴.۳] مراجعه کنید).

گزاره زیر بیان می‌کند که اگر G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه هاسدورف موضعاً فشرده K و H باشد. آنگاه G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد.

گزاره ۲.۲. *فرض کنید $G = K \times_\tau H$. در این صورت G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد که از رو تابع $\rho : G \to (0,\infty)$ به‌دست می‌آید و ρ به‌صورت*

$$\rho(g) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

تعریف می‌شود وقتی $g \in G, h \in H$ و برای یک $k \in K$، $g = kh$ [۶].

گزاره ۳.۲. *فرض کنید $G = K \times_\tau H$ و رو-تابع ρ برای زوج (G, H) تعریف شده به صورت زیر باشد:*

$$\rho(kh) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}$$

آنگاه وجود دارد یک اندازه هار چپ dk روی K به‌طوری‌که

$$\int_G f(g)\rho(g)dg = \int_K \int_H f(kh)dhdk \tag{۴.۲}$$

که در آن $f \in C_c(G)$. [۶]

۳. روش پیشنهادی

از آنجایی که بیشتر گروه‌ها به صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه موضعاً فشرده می‌باشند لذا بر آن شدیم تا رابطه بین موجک‌های پذیرفتنی را بین گروه‌های حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم و فضای همگن آن گروه‌ها بررسی کنیم. در بعضی نمایش‌ها از گروه‌ها انتگرال‌پذیر مربعی به سادگی قابل تعیین نیست لذا با توجه به رابطه‌ای که بین آن‌ها می‌یابیم، انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن آن گروه را می‌توان به‌جای انتگرال‌پذیر مربعی گروه جایگزین کرد.

حال نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. یک نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن G/H یک نگاشت ϖ از G/H به توی گروه $U(\mathcal{H}) \subseteq B(\mathcal{H})$ از عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $g, g_1, g_2 \in G$ و $x, y \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

- $\varpi(g_1 g_2 H) = \varpi(g_1 H)\varpi(g_2 H)$
- $\varpi(g^{-1}H) = \varpi(gH)^*$
- نگاشت $gH \mapsto <\varpi(gH)x, y>$ از G/H به $\mathbb{C}$ پیوسته است.

نکته ۲.۳. هر نمایش یکانی پیوسته از فضای همگن G/H تعریف شده بدین صورت، یک نمایش یکانی پیوسته π روی گروه G تعریف می‌کند به‌طوری‌که هسته [7] π شامل زیرگروه H می‌شود. بالعکس، هر نمایش یکانی پیوسته π از گروه G که روی H بدیهی است، یک نمایش یکانی پیوسته ϖ از G/H با در نظرگرفتن $\varpi(gH) = \pi(g)$ تعریف می‌کند.

هم‌چنین یک زیرفضای بسته M از $\mathcal{H}$ نسبت به ϖ پایا[8] است اگر برای هر $g \in G$، $\varpi(gH)M \subseteq M$. یک نمایش یکانی پیوسته ϖ را تحویل‌ناپذیر[9] گوییم اگر زیرفضاهای پایای آن فقط $\{0\}$ و $\mathcal{H}$ باشند. در ادامه بحث یک نمایش یکانی پیوسته را با عنوان یک نمایش نام می‌بریم.

---
[7]kernel
[8]invariant
[9]irreducible

مثال زیر مثالی از یک نمایش از فضای همگن روی یک فضای هیلبرت $L^2(G/H) = L^2(G/H,\mu)$ می‌باشد که که μ یک اندازه پایای نسبی می‌باشد که از رو- تابع ρ القا شده است.

مثال ۳.۳. فرض کنید G حاصل‌ضرب مستقیم از دو زیرگروه نرمال K و H باشد. نمایش چپ

$$\varrho : G \to U(L^2(G/H)), \quad \varrho(g)\varphi = (\frac{\rho(e)}{\rho(k)})^{1/2} L_k\varphi$$

را در نظربگیرید که در آن $L_k\varphi(gH) = \varphi(k^{-1}gH)$ است ([۷، قضیه ۱.۳]). بدیهی است که $\varrho(H) = id_{\mathcal{H}}$. بنابراین می‌توان نمایش زیر را از فضای همگن G/H روی فضای هیلبرت $L^2(G/H)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\widetilde{\varrho} : G/H \to U(L^2(G/H)), \quad \widetilde{\varrho}(gH) = \varrho(g).$$

در ابتدا نشان می‌دهیم نمایش تعریف شده در بالا خوش‌تعریف است. زیرا اگر $g_1H = g_2H.$ آنگاه $k_1^{-1}k_2 \in H \cap K = e$.بنابراین $k_1 = k_2$ و این نتیجه می‌دهد که $\varrho(g_1) = \varrho(g_2)$. همچنین از این‌که نگاشت چپ تعریف شده در بالا روی H همانی است، داریم:

$$\widetilde{\varrho}(g_1H)\widetilde{\varrho}(g_2H) = \widetilde{\varrho}(g_1g_2H).$$

در واقع

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varrho}(g_1g_2H)\varphi &= (\frac{\rho(e)}{\rho(k_1k_2)})^{1/2} L_{k_1k_2}\varphi \\
&= (\frac{\rho(e)^2}{\rho(k_1)\rho(k_2)})^{1/2} L_{k_1}L_{k_2}\varphi \\
&= (\frac{\rho(e)}{\rho(k_1)})^{1/2}\frac{\rho(e)}{\rho(k_2)})^{1/2} L_{k_1}L_{k_2}\varphi \\
&= \widetilde{\varrho}(g_1H)\widetilde{\varrho}(g_2H)\varphi.
\end{aligned}$$

همچنین بنا به گزاره ۲.۲ ، G/H یک اندازه پایای نسبی می‌پذیرد که در رابطه (۲.۲) صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varrho}(gH)\varphi\|_{۲} &= \int_{G/H} |\varphi(k^{-۱}gH)|^{۲} \frac{\rho(e)}{\rho(k)} d\mu(gH) \\ &= \int_{G/H} |\varphi(gH)|^{۲} \frac{\rho(e)}{\rho(k)} d\mu_k(gH) \\ &= \int_{G/H} |\varphi(gH)|^{۲}\, d\mu(gH) \\ &= \|\varphi\|_{۲} \end{aligned}$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده و H یک زیر گروه فشرده از آن باشد. یک نمایش تحویل‌ناپذیر ϖ از G/H روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را یک *نمایش انتگرال‌پذیر مربعی*[۱۰] نامیم هرگاه عنصر غیرصفر ζ در $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که

$$\int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(g)} \,|<\zeta, \varpi(gH)\zeta>|^{۲} d\mu(gH) < \infty, \qquad (۱.۳)$$

که در آن μ یک اندازه پایای نسبی روی G/H القا شده از رو-تابع $\rho : G \longrightarrow (۰,\infty)$ است. اگر بردار ζ در شرط (۱.۳) صدق کند ، آن‌را یک بردار پذیرفتنی [۱۱] می‌نامیم و همچنین بردار پذیرفتنی $\zeta \in \mathcal{H}$ را موجک پذیرفتنی [۱۲] گوییم هرگاه $\|\zeta\| = ۱$. در این حالت *ثابت موجکی*[۱۳] وابسته به موجک ζ را با نماد c_ζ نمایش می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_\zeta := \int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(g)} \,|<\zeta, \varpi(gH)\zeta>|^{۲} d\mu(gH). \qquad (۲.۳)$$

[10] square integrable representation
[11] admissible vector
[12] admissible wavelet
[13] *wavelet constant*

(برای دیدن جزئیات بیشتر به [۲] مراجعه کنید).

فرض کنید گروه G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H باشد، یعنی $G = K \times_\tau H$. در ابتدا نشان می‌دهیم که اگر ϖ یک نمایش روی فضای همگن G/H انتگرال‌پذیر مربعی باشد آنگاه یک نمایش از زیرگروه K انتگرال‌پذیر مربعی است.

قضیه ۵.۳. *فرض کنید G حاصل‌ضرب نیم مستقیم از زیرگروه نرمال K وزیرگروه بسته و فشرده H باشد. نمایش ϖ روی فضای همگن G/H یک نمایش روی زیرگروه K تعریف می‌کند که انتگرال‌پذیری مربعی نمایش روی K از انتگرال‌پذیری مربعی نمایش ϖ روی G/H نتیجه می‌شود.*

اثبات. فرض کنید ϖ یک نمایش از G/H باشد. در این‌صورت نمایش ϖ یک نمایش π از گروه G تعریف می‌کند که روی H همانی است. به عبارت دیگر نگاشت زیر یک نمایش از گروه G است که روی H همانی است.

$$\pi : K \times_\tau H \to U(\mathcal{H}), \quad \pi(x) = \varpi(xH), \quad x = kh.$$

حال نگاشت تعریف شده در زیر روی زیرگروه K یک نمایش می‌باشد.

$$\varsigma : K \to U(\mathcal{H}), \quad \varsigma(k) = \varpi(kH). \tag{۳.۳}$$

فرض کنید $\mathcal{M}$ زیرفضای نابدیهی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نسبت به نمایش ς پایا باشد، یعنی برای هر $k \in K$ داشته باشیم $\varsigma(k)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$. پس بنا به رابطه (۳.۳) داریم $\varpi(kH)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$. یعنی $\mathcal{M}$ نسبت به نمایش ϖ پایا است که با تحویل ناپذیری ϖ تناقض دارد. بنابراین نمایش ς تحویل‌ناپذیر است اگر نمایش ϖ روی G/H تحویل‌ناپذیر باشد. همچنین از این‌که نمایش ϖ انتگرال‌پذیر مربعی است لذا $\int_{G/H} \frac{\rho(e)}{\rho(x)} |< \varpi(xH)\zeta, \zeta >|^{۲} d\mu(xH) < \infty$. قرار دهید $\frac{\rho(e)}{\rho(x)} |< \varpi(xH)\zeta, \zeta >|^{۲} = \Psi(xH)$. پس $\Psi \in L^{۱}(G/H)$ و می‌دانیم نگاشت $T : L^{۱}(G) \to L^{۱}(G/H)$ پوشاست بنابراین $\varphi \in L^{۱}(G)$ موجود است به‌طوریکه $\Psi = T\varphi$.

لذا بنا به فرمول(۴.۲) و (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{G/H}\frac{\rho(e)}{\rho(x)}|<\varpi(xH)\zeta,\zeta>|^{2}d\mu(xH) &= \int_{G/H}T(\varphi)(xH)d\mu(xH)\\
&= \int_{G}\varphi(x)dx\\
&= \int_{K}\int_{H}\varphi(kh)dhdk\\
&= \int_{K}\int_{H}\rho(kh)\frac{\varphi(kh)}{\rho(kh)}dhdk\\
&= \int_{K}\rho(x)T\varphi(kH)dk\\
&= \rho(e)\int_{K}|<\varpi(kH)\zeta,\zeta>|^{2}\\
&= \rho(e)\int_{K}|<\varsigma(k)\zeta,\zeta>|^{2}dk,
\end{aligned}$$

که در آن $\varphi\in L^{1}(G)$ و $x=kh$. بنابراین اگر ϖ انتگرال‌پذیر مربعی باشد نتیجه می‌شود که ς نیز انتگرال‌پذیر مربعی است. □

نتیجه ۶.۳. *فرض کنید G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته فشرده H باشد. اگر بردار ξ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش ϖ از G/H باشد آنگاه ξ موجک پذیرفتنی برای نمایش ς از زیرگروه K است.*

در ادامه نشان می‌دهیم که اگر G گروه حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته فشرده H باشد، آنگاه نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از زیرگروه K، نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از فضای همگن G/H را نتیجه می‌دهد. برای این منظور ابتدا فرض کنید $q:G\to G/K$ نگاشت کانونی و ς یک نمایش از زیرگروه K روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{\varsigma}$ باشد. در ابتدا نمایشی روی گروه G می‌سازیم به‌طوری‌که روی زیرگروه H همانی باشد و از آن نمایش ϖ روی G/H را می‌توان نتیجه گرفت. برای این منظور فضای توابع پیوسته از G به فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{\varsigma}$ را با $C(G,\mathcal{H}_{\varsigma})$ نشان می‌دهیم و فضای توابع

برداری مقدار زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathfrak{F} = \{f \in C(G, \mathcal{H}_\varsigma);\ \text{فشرده است}\ \ q(suppf), f(xk) = \varsigma(k^{-1})f(x),\quad x \in G, k \in K\}.$$

برای هر $f, g \in \mathfrak{F}$ می‌توان تابعکی مانند Υ از G/K تعریف کرد به‌طوری‌که $\Upsilon(xK) =< f(x), g(x) >_\varsigma$. بدیهی است که Υ در $C_c(G/K)$ قرار دارد و نسبت به اندازه G-پایای μ روی G/K انتگرال‌پذیر است. بنا به تعریف نمایش ς از زیرگروه K نگاشت Υ خوش‌تعریف است. در واقع

$$\begin{aligned} < f(xk), g(xk) >_\varsigma &= < \varsigma(k^{-1})f(x), \varsigma(k^{-1})g(x) >_\varsigma \\ &= < \varsigma(k)\varsigma(k^{-1})f(x), g(x) >_\varsigma \\ &= < f(x), g(x) >_\varsigma . \end{aligned}$$

قرار دهید:

$$< f, g >= \int_{G/K} < f(x), g(x) >_\varsigma d\lambda(xK),$$

که λ یک اندازه G-پایا برای G/K است. به سادگی بررسی می‌شود که $<.,.>$ یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{F}$ است. کامل‌سازی فضای $\mathfrak{F}$ یک فضای هیلبرت است که آن را با $\mathfrak{F}$ نمایش می‌دهیم. نگاشت π روی گروه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi : G \to U(\mathfrak{F}), \quad \pi(x)f = L_k f; \quad x = kh.$$

واضح است که $\pi(H) = id$. برای هر $f \in \mathfrak{F}$ داریم:

$$L_k f(xk'') = f(k^{-1}xk'') = \varsigma(k'')L_k f(x)$$

بنابراین $L_k f \in \mathfrak{F}$ و اگر برای $x_۱, x_۲ \in G$ داشته باشیم $x_۲ = x_۱$. آنگاه بنا به منحصربفردی نمایش $x_۱ = k_۱h_۱, x_۲ = k_۲h_۲$ داریم $k_۱ = k_۲$. پس $\pi(x_۲) = \pi(x_۱)$. نگاشت π همریختی است زیرا π روی

H همانی است و برای هر $f \in \mathfrak{F}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\pi(x_1 x_2)f &= \pi(k_1 k_2^{h_1} h_1 h_2)f \\
&= L_{k_1 k_2^{h_1}} f \\
&= L_{k_1} L_{k_2^{h_1}} f \\
&= L_{k_1} L_{h_1^{-1}} L_{k_2} L_{h_1} f \\
&= L_{k_1} L_{k_2} f \\
&= \pi(x_1)\pi(x_2) f.
\end{aligned}$$

همچنین نگاشت π یکانی است. در واقع

$$\begin{aligned}
< \pi(x)f, \pi(x)f > &= \int_{G/K} < \pi(x)f(x''), \pi(x)f(x'') >_{\varsigma} d\lambda(x''K) \\
&= \int_{G/K} < L_k f(x''), L_k f(x'') >_{\varsigma} d\lambda(x''K) \\
&= \int_{G/K} < f(x''), f(x'') >_{\varsigma} d\lambda(x''K) \\
&= < f, f >,
\end{aligned}$$

که در آن $x = kh$. پیوستگی π نیز از پیوستگی انتقالات چپ نتیجه می‌شود. بنابراین π یک نمایش از گروه G است که روی H همانی است . لذا یک نمایش ϖ از G/H تعریف می‌کند به‌طوری‌که $\varpi(xH) = \pi(x)$. بنابراین می‌توان گزاره زیر را نتیجه گرفت:

گزاره ۷.۳. *فرض کنید گروه G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H و ς یک نمایش از K باشد. در این صورت ϖ یک نمایش از فضای همگن G/H است.*

گزاره زیر نشان می‌دهد که اگر نمایش ς از زیرگروه K تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه نمایش ϖ از فضای

همگن G/H تحویل‌ناپذیر است.

گزاره ۸.۳. *فرض کنیدگروه G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته H باشد. اگر ς یک نمایش تحویل‌ناپذیر از زیرگروه K باشد آنگاه نمایش ϖ از فضای همگن G/H تحویل‌ناپذیر است.*

اثبات. فرض کنید ς یک نمایش از زیرگروه K روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\varsigma$ باشد. بنا به قضیه ۷.۳ نمایش ϖ از G/H روی فضای هیلبرت $\mathfrak{F}$ وجود دارد. زیر فضای بسته ϖ-پایای $\mathfrak{M}$ را از فضای هیلبرت $\mathfrak{F}$ در نظر بگیرید. برای $f \in \mathfrak{F}$ و $\phi \in C_c(G)$ قرار دهید:

$$\nu_{f,\phi} = \int_G \phi(x^{-1}) f(x^{-1}) dx$$

و بستار فضای خطی تولید شده توسط فضای $\{\nu_{f,\phi};\quad f \in \mathfrak{M}, \phi \in C_c(G)\}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\varsigma$ را در نظر بگیرید و آن را با $\widetilde{\mathfrak{M}}$ نمایش می‌دهیم. برای هر $k \in K$ داریم:

$$\begin{aligned}
\varsigma(k)\nu_{f,\phi} &= \int_G \phi(x^{-1})\varsigma(k) f(x^{-1}) dx \\
&= \int_G \phi(x^{-1}) f(x^{-1}k^{-1}) dx \\
&= \int_G \phi(x^{-1}k) f(x) dx \\
&= \int_G \tilde{\phi}(x) f(x) dx \\
&= \nu_{f,\tilde{\phi}},
\end{aligned}$$

که در آن $\tilde{\phi} = \phi(x^{-1}k)$. بنابراین $\widetilde{\mathfrak{M}}$ زیر فضای بسته ς-پایا از فضای هیلبرت $\mathfrak{F}$ می‌باشد. بنا به تحویل ناپذیری نمایش ς نتیجه می‌شود که $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{0\}$ یا $\widetilde{\mathfrak{M}} = \mathcal{H}_\varsigma$ است. از این‌که بین $\mathfrak{M}, \widetilde{\mathfrak{M}}$ تناظر یک به یک وجود دارد(ببینید [۴، لم۶.۳۰]) بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $\mathfrak{M} = \{0\}$ یا $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. بنابراین نمایش ϖ از فضای همگن G/H تحویل‌ناپذیر است. □

قضیه زیر بیان می‌کند که انتگرال‌پذیر مربعی نمایش ϖ از فضای همگن G/H از انتگرال‌پذیر مربعی نمایش ς از زیر گروه K نتیجه می‌شود.

قضیه ۹.۳. *فرض کنید گروه G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته و فشرده H باشد. اگر ς یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی از زیرگروه K باشد آنگاه نمایش ϖ از G/H انتگرال‌پذیر مربعی است.*

اثبات. فرض کنید ς نمایش تحویل‌ناپذیراز زیر گروه K باشد. دراین‌صورت ϖ یک نمایش تحویل‌ناپذیر از فضای همگن G/H است. بنا به فشردگی H و همانی بودن نمایش π روی زیرگروه H، برای هر $f \in \mathfrak{F}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\int_K |<\varsigma(k)f(x), f(x)>|^2 dk &= \int_K |<f(xk^{-1}), f(x)>|^2 dk \\
&= \int_K |<f(xkx^{-1}x), f(x)>|^2 dk \\
&= \int_K |<L_{xkx^{-1}}f(x), f(x)>|^2 dk \\
&= \int_K |<\pi(xkx^{-1})f(x), f(x)>|^2 dk \\
&= \int_K |<\pi(x)\pi(k)\pi(x^{-1})f(x), f(x)>|^2 dk \\
&= \int_K \int_H |<\pi(x)\pi(k)\pi(h)\pi(x^{-1})f(x), f(x)>|^2 dh dk \\
&= \int_G |<\pi(x)\pi(x^{\#})\pi(x^{-1})f(x), f(x)>|^2 dx^{\#} \\
&= \int_{G/H} T(\varphi)(x^{\#}) d\mu(x^{\#}H) \\
&= \int_{G/H} \int_H \frac{\varphi(x^{\#}\eta)}{\rho(x^{\#}\eta)} d\eta d\mu(x^{\#}H)
\end{aligned}
$$

$$= \int_{G/H}\int_{H}\frac{\rho(e)}{\rho(x^{\sharp})}| < \pi(x)\pi(kh\eta)\pi(x^{-1})f(x), f(x) > |^{2}d\eta d\mu(x^{\sharp}H)$$
$$= \int_{G/H}\frac{\rho(e)}{\rho(x^{\sharp})}| < \varpi(x^{\sharp}H)\pi(x^{-1})f(x), \pi(x^{-1})f(x) > |^{2}d\mu(x^{\sharp}H),$$

که در آن $x^{\sharp} = kh, \varphi = | < \pi(x)\pi(x^{\sharp})\pi(x^{-1})f(x), f(x) > |^{2}$ و μ یک اندازه پایای نسبی برای G/H است. بنابراین نمایش ϖ از فضای همگن G/H انتگرال‌پذیر مربعی است. □

از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر موجک پذیرفتنی در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ برای نمایش ς از زیرگروه K نیز یک موجک پذیرفتنی در فضای هیلبرت $\mathfrak{F}$ برای نمایش ϖ از فضای همگن G/H می‌سازد.

نتیجه ۱۰.۳. *فرض کنید گروه G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از زیرگروه نرمال K و زیرگروه بسته و فشرده H باشد. اگر $\xi \in \mathcal{H}$ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش ς از زیرگروه K باشد آنگاه $\pi(x) * f$ یک موجک پذیرفتنی در $\mathfrak{F}$ برای نمایش ϖ از G/H است که برای $\phi \in C_c(G)$ ، $f(x) = \phi(x)\xi$ می‌باشد.*

قضیه زیر رابطه بین موجک‌های پذیرفتنی روی فضای همگن G/H و گروه موضعاً فشرده G را که G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از دو گروه K و H است را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید K و H دو گروه موضعاً فشرده باشند به‌طوری‌که $G = K \times_{\tau} H$. در نظر بگیرید ϖ و π به‌ترتیب نمایش‌هایی از فضای همگن G/H و گروه G باشند. در این صورت ξ یک موجک پذیرفتنی برای ϖ است اگرو فقط اگر ξ یک موجک پذیرفتنی برای π باشد.*

اثبات. بنا به نتیجه (۶.۳) کافیست نشان دهیم که نمایش π از G انتگرال‌پذیر مربعی است اگر و فقط

اگر π_K از K انتگرال‌پذیر مربعی باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\int_G |<\zeta,\pi(g)\zeta>|^{۲}dg &= \int_K\int_H |<\zeta,\pi(kh)\zeta>|^{۲}dhdk\\ &= \int_K\int_H |<\zeta,\pi(k)\pi(h)\zeta>|^{۲}dhdk\\ &= \int_K\int_H |<\zeta,\pi(k)\zeta>|^{۲}dhdk\\ &= \int_K |<\zeta,\pi_K(k)\zeta>|^{۲}dk.\end{aligned}$$

بنابراین ξ پذیرفتنی برای نمایش π از G است اگر و فقط اگر ξ پذیرفتنی برای π_K باشد و این نتیجه می‌دهد که ξ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش π از G است اگر وفقط اگر ξ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش ϖ از G/H باشد. □

در پایان مثالی ارائه می‌دهیم که بتوانیم کاربردی از قضیه‌های اثبات شده در این مقاله را ببینیم.

مثال ۱۲.۳. فرض کنید G گروه ویل‌هایزنبرگ باشد. یعنی $(WH)^n=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times_\tau\mathbb{R}/۲\pi\mathbb{Z}$ عمل دوتایی روی گروه $(WH)^n$ برای هر $(q_۱,p_۱,t_۱),(q_۲,p_۲,t_۲)\in(WH)^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(q_۱,p_۱,t_۱).(q_۲,p_۲,t_۲)=(q_۱+q_۲,p_۱+p_۲,t_۱+t_۲+q_۱.p_۲).$$

که در آن $q_۱.p_۲$ حاصل‌ضرب داخلی اقلیدسی از $q_۱,p_۲$ در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. اندازه لبگ $dqdpdt$ روی $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times[۰,۲\pi]$ یک اندازه هار چپ روی $(WH)^n$ است. نمایش تعریف شده در زیر برای هر $(q,p,t)\in(WH)^n$ و $\varphi\in L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ یک نمایش تحویل‌ناپذیر است.

$$\pi:(WH)^n\to U(L^{۲}(\mathbb{R}^n)),\quad (\pi(q,p,t)\varphi)(x)=e^{i(px-qp+t)}\varphi(x-q),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

در ([۹]،[بخش ۱۷]) نشان داده شده است که این نمایش، انتگرال‌پذیر مربعی است و هر $\varphi\in L^{۲}(\mathbb{R}^n)$ با $\|\varphi\|=۱$ یک موجک پذیرفتنی برای نمایش π است. حال در نظر بگیرید $H=\{(\circ,\circ,t),\quad t\in$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ فضای همگن گروه $(WH)^n$ می‌باشد. تعریف کنید:

$$\varpi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to U(L^2(\mathbb{R}^n)), \quad (\varpi(q, p)\varphi)(x) = e^{i(px-qp)}\varphi(x-q),$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. در [۳] نشان داده شده است که ϖ یک نمایش انتگرال‌پذیر مربعی G/H است و هر $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ یک موجک پذیرفتنی برای ϖ است. بنا به قضیه ۹.۳ ، از انتگرال‌پذیری مربعی نمایش از زیرگروه $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ انتگرال‌پذیر مربعی روی فضای همگن از گروه ویل‌هایزنبرگ نتیجه می‌شود.

مراجع

[۱] S.T. Ali، J-P. Antoine and J-P. Gazeau، *Coherent States، Wavelets and Their Generalizations*، Springer-Verlag، New York، ۲۰۰۰.

[2] F. Esmaeelzadeh, R.A. Kamyabi Gol and R. Raisi Tousi, On the continuous wavelet transform on homogeneous spaces, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **10**(4) (2012), 1–18.

[3] F. Esmaeelzadeh, R.A. Kamyabi Gol and R. Raisi Tousi, Two-wavelet constants for square integrable representations of G/H, *Wavelet and linear algebra*, **1**(1) (2014), 63–73.

[4] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, 1986.

[5] H. Führ and M. Mayer, Continuous wavelet transform from semidirect product: cyclic representation and plancheral measure, *J. Fourier Anal. Appl.*, **8** (2002), 375–398.

[6] R.A. Kamyabi Gol and N. Tavallaei, Convolution and homogeneous spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **35**(1) (2009), 129–146.

[7] R.A. Kamyabi Gol and N. Tavallaei, Wavelet transforms via generalized quasi-regular representations, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **26**(3) (2009), 291-–300.

[8] H. Reiter and J. Stegeman, *Classical Harmonic Analysis and Locally compact Group*. Clarendon press, 2000.

[9] M.W. Wong, *Wavelet Transform and Localization Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.