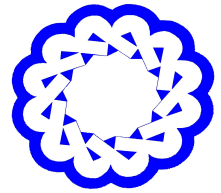


موجک‌ها و جبرخطی

<http://wala.vru.ac.ir>



دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

یک کران برای حدس فایتینگر

محمدعلی حسنخانی فردآ

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

چکیده

در این مقاله با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در فضای با بعد متناهی \mathbb{C}^n ، یک کلاس از قاب‌های کیپ هم‌نرم ریس ناپذیر معرفی می‌شود و با استفاده از کلاس مذکور یک کران برای حدس فایتینگر ارائه می‌شود. طبق حدس فایتینگر که البته اخیراً ثابت شده است، برای $A, C > 0$ داده شده یک ثابت کلی $\delta > 0$ مستقل از n وجود دارد به طوری که هر قاب A -کیپ C -هم‌نرم در \mathbb{C}^n می‌تواند به r دنباله پایه ریس با کران پایین پایه ریس δ افزایش شود. در این مقاله نشان داده می‌شود که $r > \frac{A}{C}$.

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۱۹ دی ۱۳۹۶

پذیرفته شده: ۱ خرداد ۱۳۹۷

دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: فرشید عبداللهی

کلمات کلیدی:

دنباله پایه ریس، قاب

کیپ، حدس فایتینگر،

دنباله (δ, r) -ریس پذیر.

آدرس ایمیلها: m.hasankhani@vru.ac.ir (محمدعلی حسنخانی فرد).

<http://doi.org/10.22072/wala.2018.79107.1147>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۳۹۷) ©

۱. مقدمه

فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای \mathcal{H} است اگر ثابت‌های $A > 0$ ، $B < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$ ،

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad (1.1)$$

که در آن A, B به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. نامساوی دومی در شرط قاب (۱.۱) شرط بسل^۱ برای دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است. اگر $A = B$ ، آنگاه قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کیپ و اگر $A = B = 1$ آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کیپ نرمال شده یا قاب پارسوال گویند.

اگر همه اعضای قاب دارای نرم یکسان باشند قاب را قاب هم‌نرم نامند، به ویژه اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب کیپ با کران قاب A باشد به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|f_k\| = C$ آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب A -کیپ C -هم‌نرم گویند.

قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک قاب کراندار گویند اگر یک ثابت مثبت λ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|f_k\| \geq \lambda$. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله قاب نامیده می‌شود اگر یک قاب برای $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد.

عملگر خطی کراندار

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

را عملگر قاب اولیه و عملگر خطی کراندار

$$S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k$$

را عملگر قاب برای قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ گویند.

¹Bessel

یک پایه ریس برای \mathcal{H} یک دنباله به صورت $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای \mathcal{H} و $U \in B(\mathcal{H})$ یک عملگر معکوس پذیر است. هر پایه ریس یک قاب برای \mathcal{H} است. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ریس است اگر و تنها اگر کامل باشد و ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر دنباله متناهی $\{c_k\}_{k \in I}$ از اعداد مختلط داشته باشیم:

$$A \sum_{k \in I} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in I} c_k f_k \right\|^2 \leq B \sum_{k \in I} |c_k|^2,$$

که در آن A, B به ترتیب کران پایه ریس پایین و کران پایه ریس بالای $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامیده می‌شوند. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله پایه ریس نامیده می‌شود اگر یک پایه ریس برای $\overline{\text{span}}\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد. برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ عملگر انتقال و عملگر مدولی روی $L_2(\mathbb{R})$ به ترتیب با

$$(T_a g)(x) = g(x - a), \quad (E_b g)(x) = e^{i\pi b x} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

تعریف می‌شوند. یک قاب گابور یک قاب برای فضای هیلبرت $L_2(\mathbb{R})$ به صورت $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$ است که در آن $a, b > 0$ و g یک تابع ثابت در $L_2(\mathbb{R})$ است. برای اطلاعات بیشتر درباره قاب‌ها به مراجع [۳، ۴، ۷] مراجعه کنید.

فایتینگر^۲ در مطالعه قاب‌های گابور متوجه شد همه مثال‌های قاب‌های گابور دارای این خاصیت هستند که به صورت اجتماع متناهی از دنباله‌های پایه ریس نوشته می‌شوند و این حدس را پیشنهاد داد: حدس فایتینگر: هر قاب کراندار را می‌توان به صورت اجتماع متناهی از دنباله‌های پایه ریس نوشت. در مرجع [۱] نشان داده شده است که حدس فایتینگر با حدس فیچتنگر متناهی هم ارز است.

حدس فایتینگر متناهی: برای هر $B, C > 0$ یک عدد طبیعی $r = r(B, C)$ و یک عدد $0 < A = A(B, C)$ وجود دارد به طوری که اگر $\{f_i\}_{i \in I}$ یک قاب برای \mathbb{C}^n با کران بالای قاب B باشد و $\|f_i\| \geq C$ برای هر $i \in I$ ، آنگاه I را می‌توان به مجموعه‌های $\{I_j\}_{j=1}^r$ افراز کرد به طوری که برای هر $1 \leq j \leq r$ دنباله $\{f_i\}_{i \in I_j}$ یک دنباله پایه ریس با کران پایه ریس پایین A و کران پایه ریس بالای B است.

²Feichtinger

حدس فایتینگر با مساله مشهور کیدیسون-سینگر^۳ هم ارز است و این مساله اخیرا ثابت شده است [۵، ۶]. بنابراین هر قاب کراندار را می‌توان به زیر مجموعه‌هایی که دنباله پایه ریس هستند، افراز کرد. در این مقاله روی تعداد این زیر مجموعه‌ها کار می‌کنیم و در واقع یک کلاس از قاب‌های A -کیپ C هم‌نرم ارائه می‌دهیم که نمی‌توان آن را به r دنباله پایه ریس افراز کرد که در آن $r \leq \frac{A}{C}$ ، $\delta > 0$ و

$$C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}} := \left\{ \sqrt{\frac{A}{m}} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

۲. قاب‌های ریس پذیر

در این بخش با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در \mathbb{C}^n یک کلاس از قاب‌های کیپ هم‌نرم می‌سازیم. **تعریف ۱.۲.** فرض کنید $r \in \mathbb{N}$ ، $r \geq 2$ و $\delta > 0$. یک خانواده از بردارها $\{f_i\}_{i=1}^m$ برای فضای هیلبرت n -بعدی \mathcal{H}_n را (δ, r) -ریس پذیر گویند اگر یک افراز $\{I_j\}_{j=1}^r$ از مجموعه $\{1, 2, \dots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای همه $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ و اسکالرهای $\{c_i\}_{i \in I_j}$ داشته باشیم:

$$\left\| \sum_{i \in I_j} c_i f_i \right\|^2 \geq \delta \sum_{i \in I_j} |c_i|^2.$$

چون حدس فایتینگر اکنون ثابت شده است لذا $\delta > 0$ مستقل از n و $r \geq 2$ وجود دارند به‌طوری‌که هر قاب کراندار $\{f_i\}_{i=1}^m$ برای فضای هیلبرت n -بعدی \mathcal{H}_n ، (δ, r) -ریس پذیر است [۱]. اکنون این سوال مطرح است:

فرض کنید $r \geq 2$ داده شده است، آیا یک $\delta > 0$ مستقل از n وجود دارد به‌طوری‌که هر قاب کراندار $\{f_i\}_{i=1}^m$ برای فضای هیلبرت n -بعدی \mathcal{H}_n ، (δ, r) -ریس پذیر باشد؟ در مرجع [۲] نشان داده شده است که یک قاب ۲-کیپ ۱-هم‌نرم وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\delta > 0$ ، $(\delta, 2)$ -ریس پذیر نیست.

در گزاره زیر قاب‌های A -کیپ در \mathbb{C}^n کاملا مشخص می‌شوند.

گزاره ۲.۲. [۳] یک دنباله $\{f_i\}_{i=1}^m$ از بردارها در \mathbb{C}^n یک قاب A -کیپ برای \mathbb{C}^n است اگر و تنها اگر

³Kadison-Singer

ماتریسی که سطرهای آن f_i ها است دارای ستونهای متعامد باشد و مجموع توان دوم اعداد ستونهای آنها برابر A شود.

فرض کنید D_n تبدیل فوریه گسسته $n \times n$ به صورت زیر باشد:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{n}} & e^{\frac{4\pi i}{n}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{n}} & e^{\frac{8\pi i}{n}} & \dots & e^{\frac{4\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-1)}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(n-2)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-2)}{n}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(n-2)(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-2)(n-1)}{n}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} & e^{\frac{4\pi i(n-1)}{n}} & \dots & e^{\frac{2\pi i(n-1)(n-2)}{n}} & e^{\frac{2\pi i(n-1)(n-1)}{n}} \end{pmatrix}$$

تبدیل فوریه گسسته D_n یک ماتریس یکانی است که سطرهای (ستونهای) آن یک پایه متعامد یک برای \mathbb{C}^n تشکیل می‌دهند [۳، قضیه (۱۰.۴.۱)]. همچنین قدرمطلق همه درایه‌های D_n برابر $\frac{1}{\sqrt{n}}$ است. تبدیل فوریه گسسته D_n ابزار اساسی در اثبات قضیه اصلی این مقاله است. همچنین از لم زیر از جبر خطی استفاده می‌شود.

لم ۳.۲. اگر A یک ماتریس $m \times n$ با $m < n$ باشد، آنگاه یک بردار ناصفر X با $\|X\| = 1$ در \mathbb{C}^n وجود دارد به طوری که $AX = 0$.

در قضیه زیر با استفاده از تبدیل فوریه گسسته D_n یک کلاس از قاب‌های هم‌نرم ریس ناپذیر ساخته می‌شود.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$ و $A > 0$. در این صورت یک کلاس از قاب‌های A -کیپ C -هم‌نرم وجود دارد که (δ, r) -ریس پذیر نیست برای هر $r \leq \frac{A}{C^2}$ و $\delta > 0$ که در آن $C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}}$.

اثبات. فرض کنید $A > 0, C \in \sqrt{\frac{A}{\mathbb{N}}}, r \in \mathbb{N}, 2 \leq r \leq \frac{A}{C^2}$ و $\delta > 0$. همچنین فرض کنید D_{rn} تبدیل فوریه گسسته $rn \times rn$ باشد. فرض کنید D'_{rn} ماتریس $rn \times rn$ حاصل از ضرب $n-1$ ستون اول ماتریس D_{rn} در $\sqrt{rC^2}$ و $(r-1)n+1$ ستون باقیمانده در $\sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}$ باشد. برای $2 \leq i \leq \frac{A}{C^2}$,

فرض کنید D_{rn}^i ماتریس $rn \times rn$ حاصل از ضرب $n - 1$ ستون اول ماتریس D_{rn} در $\sqrt{\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2}}$ و $(r-1)n + 1$ ستون باقیمانده در $\sqrt{\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}}$ باشد، (جدول ۱ را ببینید).
 اکنون فرض کنید D ماتریس $rn \times rn$ حاصل از چیدن $\frac{A}{C^2}$ تا ماتریس $rn \times rn$ $\{D_{rn}^i\}_{i=1}^{\frac{A}{C^2}}$ روی همدیگر مطابق جدول ۱ باشد:

جدول ۱

	$(n-1) - Columns$	$[(r-1)n+1] - Columns$
D_{rn}^1	$\sqrt{rC^2}$	$\sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}$
D_{rn}^2	$\sqrt{\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2}}$	$\sqrt{\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}}$
D_{rn}^3	$\sqrt{\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2}}$	$\sqrt{\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}}$
\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{A}{C^2} D_{rn}^{\frac{A}{C^2}}$	$\sqrt{\frac{C^2(A-rC^2)}{A-C^2}}$	$\sqrt{\frac{C^2[A(r-1)n+A-rC^2]}{(A-C^2)[(r-1)n+1]}}$

همچنین فرض کنید $\{f_i\}_{i=1}^{\frac{A}{C^2}rn}$ بردارهای سطری ماتریس D که عضو \mathbb{C}^{rn} هستند، باشند و $\{g_i\}_{i=1}^{rn}$ بردارهای ستونی ماتریس D که عضو $\mathbb{C}^{\frac{A}{C^2}rn}$ هستند، باشند.
 برای $1 \leq i \leq rn$ داریم:

$$\begin{aligned} \|f_i\|^2 &= \frac{1}{rn} \left[(n-1)rC^2 + [(r-1)n+1] \frac{rC^2}{(r-1)n+1} \right] \\ &= C^2, \end{aligned}$$

و برای $\frac{A}{C^r}rn \leq i \leq rn + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \|f_i\|^2 &= \frac{1}{rn} \left[(n-1) \frac{C^r(A - rC^r)}{A - C^r} + [(r-1)n + 1] \frac{C^r[A(r-1)n + A - rC^r]}{(A - C^r)[(r-1)n + 1]} \right] \\ &= C^r. \end{aligned}$$

همچنین برای $1 \leq i \leq n-1$ داریم:

$$\begin{aligned} \|g_i\|^2 &= rn \left(\frac{1}{rn} \right) (rC^r) + \left(\frac{A}{C^r} - 1 \right) (rn) \left(\frac{1}{rn} \right) \left(\frac{C^r(A - rC^r)}{A - C^r} \right) \\ &= A, \end{aligned}$$

و برای $n \leq i \leq rn$ داریم:

$$\begin{aligned} \|g_i\|^2 &= rn \left(\frac{1}{rn} \right) \left(\frac{rC^r}{(r-1)n + 1} \right) + \left(\frac{A}{C^r} - 1 \right) (rn) \left(\frac{1}{rn} \right) \left(\frac{C^r[A(r-1)n + A - rC^r]}{(A - C^r)[(r-1)n + 1]} \right) \\ &= A. \end{aligned}$$

بنابراین طبق گزاره ۲.۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ دنباله $\{f_i\}_{i=1}^{\frac{A}{C^r}rn}$ یک قاب A -کیپ C -هم‌نرم است. اکنون فرض کنید $\{I_j\}_{j=1}^r$ یک افراز از $\{1, 2, \dots, \frac{A}{C^r}rn\}$ باشد. بنابراین $1 \leq j \leq \frac{A}{C^r}rn$ وجود دارد به طوری که مجموعه $I_j \cap \{1, 2, \dots, rn\}$ حداقل دارای n عضو است. چون I_j حداقل دارای n عضو است لذا طبق لم ۳.۲ اسکالرهای $\{c_i\}_{i \in I_j}$ وجود دارند به طوری که $\sum_{i \in I_j} |c_i|^2 = 1$ و $P_{n-1}(\sum_{i \in I_j} c_i f_i) = 0$ که در آن P_{n-1} تصویر متعامد از \mathbb{C}^m به روی $n-1$ مختص اول است. اکنون فرض کنید $I_j^m = I_j \cap \{1, 2, \dots, rn\}$ و $\{h_i\}_{i=1}^m$ سطرهای تبدیل فوریه گسسته D_{rn} باشند. در این صورت برای هر $i \in I_j^m$ داریم $1 \leq i \leq rn$ و لذا

$$f_i = \left[\sqrt{rC^r} h_{i1}, \sqrt{rC^r} h_{i2}, \dots, \sqrt{rC^r} h_{i(n-1)}, \sqrt{\frac{rC^r}{(r-1)n+1}} h_{in}, \dots, \sqrt{\frac{rC^r}{(r-1)n+1}} h_{i(rn)} \right],$$

که در آن $h_i = [h_{i1}, \dots, h_{i(rn)}]$ چون $I - P_{n-1}$ تصویر متعامد از \mathbb{C}^{rn} بروی $(r-1)n + 1$ مختص دوم است لذا

$$\begin{aligned} (I - P_{n-1})f_i &= \left[0, 0, \dots, 0, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{i1}, \dots, \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}}h_{i(rn)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}} \left[0, 0, \dots, 0, h_{i1}, \dots, h_{i(rn)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}} (I - P_{n-1}) [h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{i1}, \dots, h_{i(rn)}] \\ &= \sqrt{\frac{rC^2}{(r-1)n+1}} (I - P_{n-1}) h_i. \end{aligned}$$

چون $\{h_i\}_{i=1}^{rn}$ یک پایه متعامد یکه برای \mathbb{C}^{rn} است، برای n های به قدر کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_j^n} c_i f_i \right\|^2 &= \left\| (I - P_{n-1}) \left(\sum_{i \in I_j^n} c_i f_i \right) \right\|^2 \\ &= \frac{rC^2}{(r-1)n+1} \left\| (I - P_{n-1}) \left(\sum_{i \in I_j^n} c_i h_i \right) \right\|^2 \\ &\leq \frac{rC^2}{(r-1)n+1} \left\| \sum_{i \in I_j^n} c_i h_i \right\|^2 \\ &\leq \frac{rC^2}{(r-1)n+1} \sum_{i \in I_j^n} |c_i|^2 \\ &< \delta \sum_{i \in I_j^n} |c_i|^2. \end{aligned}$$

□ لذا $\{f_i\}_{i=1}^m$ یک دنباله (δ, r) -ریس‌پذیر نیست.

قضیه بعدی فوراً از حدس فایتینگر و قضیه ۴.۲ نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $A, C > 0$ داده شده باشند. یک ثابت کلی $\delta > 0$ مستقل از n وجود دارد به طوری که هر قاب A -کیپ C -هم‌نرم برای \mathbb{C}^n را می‌توان به $r > \frac{A}{C}$ دنباله پایه ریس با کران پایه ریس δ افزایش کرد.

مراجع

- [1] P.G. Casazza, O. Christensen, A.M. Lindner, and R. Vershynin, A decomposition theorem for frames and the Feichtinger conjecture, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**(6) (2008), 2043–2053.
- [2] P.G. Casazza, M. Fickus, D. Mixon and J.C. Tremain, The Bourgain-Tzafriri conjecture and concrete construction of non-pavable projections, *Operators and Matrices*, **5**(2) (2011), 353–363.
- [3] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2002.
- [4] C. Heil, D. Walnut, Continuous and discrete wavelet transform, *SIAM Rev.*, **31**(4) (1969), 628–666.
- [5] A. Marcus, D. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison-Singer Problem, *arXiv:1306.3969 [math.CO]*.
- [6] N. Weaver, The Kadison-Singer Problem in discrepancy theory, *Discrete Math.*, **278**(1-3) (2004), 227–239.
- [7] R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980.