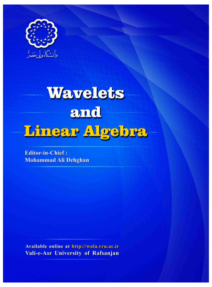
موجک‌ها و جبرخطی ۴(۳) (۱۳۹۷) ۲۳-۴۳




موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

# قاب‌های تلفیقی در هم تنیده و برخی ویژگی‌های آن‌ها در فضاهای هیلبرت

**اصغر رحیمی[*،۱]، زهرا صمدزاده[۱]، بیاض دارابی[۱]**

[۱]*دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه مراغه، آذربایجان شرقی، ایران*

## اطلاعات مقاله

*تاریخچه مقاله:*
دریافت شده: ۱۹ دی ۱۳۹۶
پذیرفته شده: ۲۶ اسفند ۱۳۹۶
دسترسی آنلاین: ۷ مرداد ۹۷

ادیتور رابط: علی‌اکبر عارفی‌جمال

*کلمات کلیدی:*

قاب تلفیقی، قاب در هم تنیده، قاب تلفیقی در هم تنیده.

## چکیده

هدف اصلی از معرفی قاب‌های تلفیقی، ارائه‌ی یک چارچوب برای فضا به کمک اجزای سازنده‌ی فضا که همان زیرفضاها هستند، می‌باشد. این نوع از قاب‌ها، رفتاری شبیه قاب‌های تعمیم یافته دارند. زمانی که بِمروس و همکارانش قاب‌های در هم تنیده را در فضای هیلبرت معرفی کردند برآن شدیم تا نتایج قاب‌های در هم تنیده‌ی استاندارد را روی قاب‌های تلفیقی بررسی کنیم و برعکس این بحث را مورد مطالعه قرار دادیم که آیا ویژگی‌های قاب‌های تلفیقی روی قاب‌های در هم تنیده برقرار است یا نه؟ در این راستا قاب‌های تلفیقی در هم تنیده را معرفی می‌کنیم و سپس به ارائه‌ی نتایجی برای این نوع از قاب‌های در هم تنیده می‌پردازیم.

## ۱. مقدمه

قاب‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین[۱] و شِفِر[۲] در موضوع آنالیز غیرهارمونیک مطرح شدند [۹] و زمانی که دابوشی[۳]، گراسمان[۴] و مایر[۵] در سال ۱۹۸۲ نتیجه تحقیقات خود را در این زمینه ارائه کردند [۸]، پس از آن به تدریج مطالعه قاب‌ها گسترش یافت و در زمینه‌هایی مثل: پردازش سیگنال، پردازش تصویر، انتقال داده، شبیه‌سازی و … مورد استفاده قرار گرفتند، به‌طوری که در سی سال گذشته نظریه قاب‌ها به تدریج به موضوعی جذّاب برای محققان تبدیل شد.

در سال ۲۰۰۳ نوعی از قاب‌های تعمیم‌یافته تحت عنوان قاب‌هایی از زیرفضاها که امروزه با نام قاب‌های تلفیقی[۶] شناخته می‌شوند، توسط کاسازا[۷] و کوتینیوک[۸] معرفی شدند [۴] که بعدها نتایج متنوعی از این نوع قاب‌ها توسط این دو محقق ارائه شد. همچنین در دو سه سال اخیر، بِمروس[۹] و همکارانش بحث قاب‌های در هم تنیده[۱۰] را مطرح کردند [۲]. این نوع از قاب‌ها به دلیل کاربردشان در پردازش سیگنال، ارسال داده‌ها و همچنین اینترنت بی‌سیم دارای اهمیت ویژه‌ای هستند. در این مقاله، ما برخی ویژگی‌های قاب‌های تلفیقی را روی قاب‌های در هم تنیده و برعکس برخی نتایج قاب‌های در هم تنیده‌ی استاندارد را روی قاب‌های تلفیقی مطالعه کرده‌ایم.

در ادامه این بخش، تعاریف مقدماتی قاب‌ها آورده می‌شود. سپس اشاره‌ای کوتاه به قاب‌های تلفیقی

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: rahimi@maragheh.ac.ir (اصغر رحیمی)، z.samadzadeh@yahoo.com (زهرا صمدزاده)، bdaraby@maragheh.ac.ir (بیاض دارابی).
http://doi.org/10.22072/wala.2018.79096.1146


[1] Duffin
[2] Schaeffer
[3] Daubechies
[4] Grossmann
[5] Meyer
[6] fusion frame
[7] Casazza
[8] Kutyniok
[9] Bemrose
[10] woven frames

و قاب‌های در هم تنیده خواهد شد. سپس در بخش بعدی، موضوع قاب‌های تلفیقی در هم تنیده[11] را مطرح و در ادامه‌ی آن، نتایج مربوط به این نوع از قاب‌ها را بیان خواهیم‌کرد.

در سراسر این مقاله $\mathbb{H}$، یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و $I$، یک مجموعه اندیس متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر می‌باشد و همچنین اعداد طبیعی $۱, ۲, ..., m$ را با نماد $[m]$ نشان خواهیم داد.

**تعریف ۱.۱.** خانواده‌ی $\{f_i\}_{i\in I}$ از فضای هیلبرت $\mathbb{H}$ یک قاب برای این فضا نامیده می‌شود اگر ثابت‌های مثبتی مثل $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ وجود داشته‌باشند به‌طوری که به ازای هر عضو $f$ داشته باشیم:

$$\mathcal{A}\left\|f\right\|^{۲} \leq \sum_{i\in I}\left|\langle f, f_i\rangle\right|^{۲} \leq \mathcal{B}\left\|f\right\|^{۲}, \tag{۱.۱}$$

ثابت‌های مثبت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به‌ترتیب کران‌های پائین و بالای قاب نامیده می‌شوند. اگر کران بالا و پائین باهم برابر باشند، در این‌صورت قاب $\{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب تنگ نامیده خواهد شد و اگر داشته باشیم $\mathcal{A} = \mathcal{B} = ۱$، یک قاب پارسوال نامیده می‌شود. اگر در عبارت بالا فقط نامساوی سمت راست برقرار باشد، در این‌صورت $\{f_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل نامیده خواهد شد.

برای هر دنباله بسل $\{f_i\}_{i\in I}$، عملگر تجزیه $U$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U : \mathbb{H} \longrightarrow \ell^{۲}(I), \quad U(f) = \left\{\langle f, f_i\rangle\right\}_{i\in I}.$$

الحاقی عملگر $U$ را با $T$ نشان داده و آن را عملگر ترکیب مربوط به $\{f_i\}_{i\in I}$ خواهیم نامید:

$$T : \ell^{۲}(I) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_i\} = \sum_{i\in I} c_i f_i, \quad \forall\{c_i\} \in \ell^{۲}(I).$$

ترکیب دو عملگر $U$ و $T$ را عملگر قاب می‌نامیم:

$$S : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad S(f) = TU(f) = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i,$$

[11] woven fusion frame

عملگر قاب $S$، عملگری مثبت، خودالحاق و معکوس‌پذیر است. همچنین هر عضو $f \in \mathbb{H}$ را می‌توان به‌صورت زیر بازسازی نمود:

$$f = \sum_{i\in I} \left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle f_i = \sum_{i\in I} \left\langle f, f_i \right\rangle S^{-1} f_i,$$

برای مشاهده اثبات این مطالب و همچنین نتایج بیشتر در این زمینه به منبع [۷] رجوع شود.

در ادامه پس از معرفی قاب‌های تلفیقی، به بیان برخی خواص مورد نیاز این نوع قاب‌ها می‌پردازیم:

**تعریف ۲.۱.** فرض کنیم $\{\nu_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از وزن‌ها باشد به‌طوری که به ازای هر $i \in I$ ، $\nu_i > 0$. دنباله‌ای از زیرفضاهای بسته $\{W_i\}_{i\in I}$ از فضای هیلبرت $\mathbb{H}$ یک قاب تلفیقی برای $\mathbb{H}$، با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ خواهد بود اگر ثابت‌های مثبت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ وجود داشته باشند به‌طوری که:

$$\mathcal{A} \left\|f\right\|^2 \leq \sum_{i\in I} \nu_i^2 \left\|P_{W_i}(f)\right\|^2 \leq \mathcal{B} \left\|f\right\|^2, \quad \forall f \in \mathbb{H},$$

که در آن $P_{W_i}$ عملگر تصویر متعامد از $\mathbb{H}$ به روی $W_i$ است. ثابت‌های مثبت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ را به ترتیب کران‌های پائین و بالای قاب تلفیقی می‌نامند. اگر کران‌های پائین و بالا باهم برابر باشند، در این‌صورت قاب تلفیقی $\{W_i\}_{i\in I}$ از نوع تنگ و اگر هردو کران باهم مساوی و برابر یک باشند، قاب تلفیقی از نوع پارسوال خواهد بود. اگر داشته باشیم $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} W_i$، در این‌صورت قاب تلفیقی مورد نظر را پایه تلفیقی متعامد یکه برای $\mathbb{H}$ می‌نامیم. اگر در نامساوی بالا فقط نامساوی سمت راست برقرار باشد، خانواده $\{W_i\}_{i\in I}$ را یک دنباله بسل از زیرفضاها با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ و با کران بسل $\mathcal{B}$ خواهیم گفت.

**توجه:**

به ازای هرخانواده از زیرفضاهای $\{W_i\}_{i\in I}$ از $\mathbb{H}$، فضای $\left(\sum_{i\in I} \bigoplus W_i\right)_{\ell_2}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(\sum_{i\in I} \bigoplus W_i\right)_{l_2} = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \;\middle|\; f_i \in W_i \quad , \quad \sum_{i\in I} \left\|f_i\right\|^2 < \infty \right\}.$$

فضای فوق با ضرب داخلی:

$$\left\langle \{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I} \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle f_i, g_i\rangle,$$

یک فضای هیلبرت است.

**لم ۳.۱.** *[۴] فرض‌کنید $\{W_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل تلفیقی با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ برای فضای هیلبرت $\mathbb{H}$ باشد. آنگاه به ازای هر دنباله $\{f_i\}_{i\in I}$، که $f_i \in W_i$ ،$(i\in I)$، سری $\sum_{i\in I} \nu_i f_i$ همگرای نامشروط است.*

عملگرهای مربوط به قاب‌های تلفیقی به‌صورت زیر خواهند بود:

**تعریف ۴.۱.** فرض کنید $\{W_i\}_{i\in I}$ یک قاب تلفیقی برای $\mathbb{H}$ با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ باشد. در این‌صورت عملگر تجزیه $\{W_i\}_{i\in I}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_{W,\nu} : \mathbb{H} \longrightarrow \left(\sum_{i\in I} \bigoplus W_i\right)_{\ell_2}, \quad U_{W,\nu}(f) = \left\{\nu_i P_{W_i}(f)\right\}_{i\in I}.$$

الحاقی عملگر $U_{W,\nu}$ را با $T_{W,\nu}$ نشان داده و آن را عملگر ترکیب می‌نامیم. به ازای هر $f\in\mathbb{H}$ و نیز به ازای هر عضو:

$$g = \{g_i\}_{i\in I} \in \left(\sum_{i\in I} \bigoplus W_i\right)_{\ell_2},$$

داریم:

$$T_{W,\nu} : \left(\sum_{i\in I} \bigoplus W_i\right)_{\ell_2} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad T_{W,\nu}\Big(\{g_i\}_{i\in I}\Big) = \sum_{i\in I} \nu_i g_i,$$

همچنین با ترکیب این دو عملگر، عملگر قاب تلفیقی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S_{W,\nu} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad S_{W,\nu}(f) = T_{W,\nu} U_{W,\nu}(f) = \sum_{i\in I} \nu_i^2 P_{W_i}(f), \quad \forall f \in \mathbb{H}.$$

برای مشاهده‌ی نتایج بیشتر در این زمینه به [۴، ۵] مراجعه شود.

### ۱.۱. قاب‌های در هم تنیده

قاب‌های در هم تنیده در سال ۲۰۱۵ توسط بمروس و همکارانش معرفی شدند [۲، ۶]. پس از آن وَشیشت[12] و دیپشیکا[13] [۱۰، ۱۲] و همچنین عارفی جمال و نیشابوری [۱] مطالعات گسترده‌تری را روی این نوع قاب‌ها انجام دادند . ما در این بخش با یک مثال به معرفی قاب‌های در هم تنیده می‌پردازیم.

**تعریف ۵.۱.** فرض کنیم $F=\{f_{ij}\}_{i\in I, j\in[m]}$ خانواده‌ای متناهی از قاب‌ها در فضای جدایی پذیر هیلبرت $\mathbb{H}$ باشد. اگر ثابت‌های یکنواخت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ وجود داشته باشند به‌طوری که به ازای هر افراز $\{\sigma_j\}_{j\in[m]}$ از $I$، خانواده $F_j=\{f_{ij}\}_{i\in\sigma_j, j\in[m]}$ یک قاب برای $\mathbb{H}$ با کران‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشد، در این‌صورت $F$ را یک خانواده از قاب‌های در هم تنیده با کران‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ خواهیم گفت و به ازای هر $j\in[m]$ ، $F_j$ را یک بافته از قاب‌ها می‌نامیم.

حال مثالی از قاب‌های در هم تنیده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ ارائه می‌دهیم:

**مثال ۶.۱.** فرض کنید $\{e_i\}_{i=۱}^{۲}$ پایه‌ی استانداردِ فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ باشد. همچنین فرض کنید مجموعه‌های $F$ و $G$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$F=\{f_i\}_{i=۱}^{۳}=\left\{۲e_۲, ۳e_۱, ۲e_۱+۳e_۲\right\}, \qquad G=\{g_i\}_{i=۱}^{۳}=\left\{e_۱, e_۲, ۳e_۱+e_۲\right\}.$$

پس به ازای هر عضو $f\in\mathbb{H}$ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{۳}\left|\langle f, f_i\rangle\right|^۲=\left|\langle f, f_۱\rangle\right|^۲+\left|\langle f, f_۲\rangle\right|^۲+\left|\langle f, f_۳\rangle\right|^۲,$$

بنابراین داریم:

$$۴\left\|f\right\|^۲\leq\sum_{i=۱}^{۳}\left|\langle f, f_i\rangle\right|^۲\leq ۲۲\left\|f\right\|^۲, \quad \forall f\in\mathbb{R}^۲.$$

[12] Vashisht
[13] Deepshikha

لذا $F$ یک قاب با کران‌های ۴ و ۲۲ خواهد بود. همچنین به‌طور مشابه، $G$ نیز یک قاب با کران‌های ۱ و ۱۹ خواهد بود، به‌طوری که این دو باهم تشکیل قاب در هم تنیده می‌دهند. به عنوان نمونه اگر فرض کنیم $\sigma_۱ = \{۱, ۲\}$، در این‌صورت داریم:

$$\sum_{i\in\sigma_۱} \left|\langle f, f_i\rangle\right|^۲ + \sum_{i\in\sigma_۱^C} \left|\langle f, g_i\rangle\right|^۲ = \left|\langle f, f_۱\rangle\right|^۲ + \left|\langle f, f_۲\rangle\right|^۲ + \left|\langle f, g_۳\rangle\right|^۲,$$

لذا خواهیم داشت:

$$۴\|f\|^۲ \leq \sum_{i\in\sigma_۱} \left|\langle f, f_i\rangle\right|^۲ + \sum_{i\in\sigma_۱^C} \left|\langle f, g_i\rangle\right|^۲ \leq ۲۷\|f\|^۲.$$

پس $\{f_i\}_{i\in\sigma_۱} \bigcup \{g_i\}_{i\in\sigma_۱^C}$ یک قاب است با کران‌های $\mathcal{A}_۱ = ۴$ و $\mathcal{B}_۱ = ۲۷$. به‌طور مشابه، به ازای هر $\sigma_j \subset \{۱, ۲, ۳\}$، که $۱ \leq j \leq ۸$، دنباله $\{f_i\}_{i\in\sigma_j} \bigcup \{g_i\}_{i\in\sigma_j^C}$ یک قاب خواهد بود. بنابراین $\{f_i\}_{i=۱}^۳$ و $\{g_i\}_{i=۱}^۳$ تشکیل یک قاب در هم تنیده با کران‌های یکنواخت $\mathcal{A} = \min_{۱\leq j\leq ۸} \mathcal{A}_j$ و $\mathcal{B} = \max_{۱\leq j\leq ۸} \mathcal{B}_j$ می‌دهد.

## ۲. قاب‌های تلفیقی در هم تنیده

در این بخش مفهوم قاب‌های در هم تنیده را به قاب‌های تلفیقی تعمیم خواهیم داد و برخی از خواص و ویژگی‌های آن را بیان خواهیم کرد.

**تعریف ۱.۲.** خانواده‌ای متناهی از قاب‌های تلفیقی $\left\{W_{ij}\right\}_{i=۱, j\in[m]}^{\infty}$ با وزن‌های $\{v_{ij}\}_{i\in N, j\in[m]}$، قاب تلفیقی در هم تنیده نامیده می‌شود اگر ثابت‌های یکنواخت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ وجود داشته باشند به‌طوری که به ازای هر افراز $\{\sigma_j\}_{j\in[m]}$ از $I$، دنباله $\{W_{ij}\}_{i\in\sigma_j, j\in[m]}$ یک قاب تلفیقی با کران‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشد. هر دنباله $\{W_{ij}\}_{i\in\sigma_j, j\in[m]}$ را یک بافته از قاب‌های تلفیقی می‌نامیم.

در قضیه‌ی زیر، شرایط هم ارزیِ بین قاب‌های تلفیقی در هم تنیده و قاب‌های در هم تنیده آورده شده است (لازم به ذکر است که دنباله $\left\{f_{i,j}\right\}_{i,j=۱}^{\infty}$ متفاوت از خانواده‌ای از دنباله‌های $\left\{f_{ij}\right\}_{i\in I, j\in[m]}$یِ معرفی شده در تعریف قاب‌های در هم تنیده می‌باشد).

**قضیه ۲.۲.** *فرض کنیم به ازای هر $i \in I$، $\nu_i, \mu_i > 0$ و نیز $\mathbb{J}_i$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اندیس‌گذار $I$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\{f_{ij}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ و $\{g_{ij}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ دنباله‌های قاب در $\mathbb{H}$ با کران‌های $\left(\mathcal{A}_{f_i}, \mathcal{B}_{f_i}\right)$ و $\left(\mathcal{A}_{g_i}, \mathcal{B}_{g_i}\right)$ باشند. زیرفضاهای $W_i$ و $V_i$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$W_i = \overline{span}\left\{f_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}, \qquad V_i = \overline{span}\left\{g_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}, \quad \forall i \in I,$$

*و همچنین فرض می‌کنیم $\{e_{i,j}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ و $\{e'_{i,j}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ پایه‌های متعامد یکه به ترتیب برای $W_i$ و $V_i$ باشند. اگر داشته باشیم:*

$$0 < \mathcal{A}_f = \inf_{i\in I} \mathcal{A}_{f_i} \leq \mathcal{B}_f = \sup_{i\in I} \mathcal{B}_{f_i} < \infty \quad , \quad 0 < \mathcal{A}_g = \inf_{i\in I} \mathcal{A}_{g_i} \leq \mathcal{B}_g = \sup_{i\in I} \mathcal{B}_{g_i} < \infty,$$

*آنگاه عبارات زیر معادلند:*

۱. *$\left\{\nu_i f_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ و $\left\{\mu_i g_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ تشکیل قاب در هم تنیده برای $\mathbb{H}$ می‌دهند.*
۲. *$\left\{\nu_i e_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ و $\left\{\mu_i e'_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ تشکیل قاب در هم تنیده برای $\mathbb{H}$ می‌دهند.*
۳. *قاب‌های تلفیقی $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ به ترتیب با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ و $\{\mu_i\}_{i\in I}$ تشکیل قاب در هم تنیده تلفیقی برای $\mathbb{H}$ می‌دهند.*

*اثبات.* از آنجایی که به ازای هر $i \in I$ دنباله‌های قاب $\left\{f_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ و $\left\{g_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ برای زیرفضاهای $W_i$ و $V_i$ تشکیل قاب با کران‌های به‌ترتیب $\left(\mathcal{A}_{f_i}, \mathcal{B}_{f_i}\right)$ و $\left(\mathcal{A}_{g_i}, \mathcal{B}_{g_i}\right)$ می‌دهند، لذا برای هر $\sigma \subset I$ داریم:

$$\mathcal{A}_f \sum_{i\in\sigma} \nu_i^2 \left\|P_{W_i}(f)\right\|^2 + \mathcal{A}_g \sum_{i\in\sigma^C} \mu_i^2 \left\|P_{V_i}(f)\right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i\in\sigma} \mathcal{A}_{f_i} \nu_i^{۲} \left\| P_{W_i}(f) \right\|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \mathcal{A}_{g_i} \mu_i^{۲} \left\| P_{V_i}(f) \right\|^{۲} \\
&= \sum_{i\in\sigma} \mathcal{A}_{f_i} \left\| \nu_i P_{W_i}(f) \right\|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \mathcal{A}_{g_i} \left\| \mu_i P_{V_i}(f) \right\|^{۲} \\
&\leq \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle \nu_i P_{W_i}(f), f_{i,j} \rangle \right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle \mu_i P_{V_i}(f), g_{i,j} \rangle \right|^{۲} \\
&= \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle P_{W_i}(f), \nu_i f_{i,j} \rangle \right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle P_{V_i}(f), \mu_i g_{i,j} \rangle \right|^{۲} \\
&\leq \sum_{i\in\sigma} \mathcal{B}_{f_i} \left\| \nu_i P_{W_i}(f) \right\|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \mathcal{B}_{g_i} \left\| \mu_i P_{V_i}(f) \right\|^{۲} \\
&\leq \mathcal{B}_f \sum_{i\in\sigma} \left\| \nu_i P_{W_i}(f) \right\|^{۲} + \mathcal{B}_g \sum_{i\in\sigma^C} \left\| \mu_i P_{V_i}(f) \right\|^{۲}.
\end{aligned}$$

حال برای اثبات ۱ $\Leftarrow$ ۳، فرض می‌کنیم که $\left\{\nu_i f_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ و $\left\{\mu_i g_{i,j}\right\}_{i\in I, j\in\mathbb{J}_i}$ برای $\mathbb{H}$ تشکیل قاب در هم تنیده با کران‌های یکنواخت $C$ و $\mathcal{D}$ می‌دهند. حال با استفاده از محاسبات بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma} \nu_i^{۲} \left\| P_{W_i}(f) \right\|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C} \mu_i^{۲} \left\| P_{V_i}(f) \right\|^{۲} \\
&\leq \frac{۱}{\mathcal{A}} \left( \sum_{i\in\sigma} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle P_{W_i}(f), \nu_i f_{i,j} \rangle \right| ۲ + \sum_{i\in\sigma^C} \sum_{j\in\mathbb{J}_i} \left| \langle P_{V_i}(f), \mu_i g_{i,j} \rangle \right|^{۲} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{۱}{\mathcal{A}}\left(\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f, v_i f_{i,j}\rangle\right|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f, \mu_i g_{i,j}\rangle\right|^۲\right)\\
&\leq \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}\left\|f\right\|^۲,
\end{aligned}
$$

به‌طوری که $\mathcal{A} = \min\left\{\mathcal{A}_f, \mathcal{A}_g\right\}$. همچنین برای کران پائین قاب می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma} v_i^۲\left\|P_{W_i}(f)\right\|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^۲\left\|P_{V_i}(f)\right\|^۲\\
&\geq \frac{۱}{\mathcal{B}}\left(\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle P_{W_i}(f), v_i f_{i,j}\rangle\right|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle P_{V_i}(f), \mu_i g_{i,j}\rangle\right|^۲\right)\\
&= \frac{۱}{\mathcal{B}}\left(\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f, v_i f_{i,j}\rangle\right|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f, \mu_i g_{i,j}\rangle\right|^۲\right)\\
&\geq \frac{C}{\mathcal{B}}\left\|f\right\|^۲,
\end{aligned}
$$

لذا ۳ برقرار است به‌طوری که $\mathcal{B} = \max\left\{\mathcal{B}_f, \mathcal{B}_g\right\}$.

برای اثبات ۳ $\Leftarrow$ ۱، فرض می‌کنیم که $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده با کران‌های $C$ و $\mathcal{D}$ می‌دهند. لذا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\nu_i f_{i,j}\rangle\right|^{۲}+\sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\mu_i g_{i,j}\rangle\right|^{۲}\\
=\ &\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle \nu_i P_{W_i}(f),f_{i,j}\rangle\right|^{۲}+\sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle \mu_i P_{V_i}(f),g_{i,j}\rangle\right|^{۲}\\
\geq\ &\sum_{i\in\sigma}\mathcal{A}_{f_i}\nu_i^{۲}\left\|P_{W_i}(f)\right\|^{۲}+\sum_{i\in\sigma^C}\mathcal{A}_{g_i}\mu_i^{۲}\left\|P_{V_i}(f)\right\|^{۲}\\
\geq\ &\mathcal{A}\left(\sum_{i\in\sigma}\nu_i^{۲}\left\|P_{W_i}(f)\right\|^{۲}+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^{۲}\left\|P_{V_i}(f)\right\|^{۲}\right)\\
\geq\ &\mathcal{A}C\left\|f\right\|^{۲}.
\end{aligned}$$

همچنین به‌طور مشابه:

$$\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\nu_i f_{i,j}\rangle\right|^{۲}+\sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\mu_i g_{i,j}\rangle\right|^{۲}\leq \mathcal{B}\mathcal{D}\left\|f\right\|^{۲},$$

بنابراین ۱ برقرار است.
برای اثبات ۲ $\Leftrightarrow$ ۳، چون که $\{e_{i,j}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ و $\{e'_{i,j}\}_{j\in\mathbb{J}_i}$ پایه‌های متعامد یکه برای زیرفضاهای $W_i$ و $V_i$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f)\right\|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f)\right\|^2\\
=\;&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\Big\|\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\langle f,e_{i,j}\rangle e_{i,j}\Big\|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\Big\|\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\langle f,e'_{i,j}\rangle e'_{i,j}\Big\|^2\\
=\;&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,e_{i,j}\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,e'_{i,j}\rangle\right|^2\\
=\;&\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\nu_ie_{i,j}\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j\in\mathbb{J}_i}\left|\langle f,\mu e'_{i,j}\rangle\right|^2.
\end{aligned}$$

لذا عبارات ۲ و ۳ معادل یکدیگر هستند. □

**قضیه ۳.۲.** *فرض می‌کنیم $K$ زیرفضایی بسته از $\mathbb{H}$ باشد و همچنین قاب‌های تلفیقی $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$، به‌ترتیب با وزن‌های $\{\nu_i\}_{i\in I}$ و $\{\mu_i\}_{i\in I}$، همچنین با کران‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ در $\mathbb{H}$ تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده می‌دهند. در این‌صورت خانواده‌های $\{W_i\bigcap K\}_{i\in I}$ و $\{V_i\bigcap K\}_{i\in I}$ با همان وزن‌ها و همان کران‌ها در $K$ تشکیل قاب تلفیقیِ در هم تنیده خواهند داد.*

*اثبات.* اگر $P_{W_i\cap K}=P_{W_i}(P_K)$ و $P_{V_i\cap K}=P_{V_i}(P_K)$ تصاویر متعامد، به ترتیب، به روی $W_i\bigcap K$ و $V_i\bigcap K$ باشند، به‌طوری که $P_K$، $P_{W_i}$ و $P_{V_i}$ تصاویر متعامد به ترتیب به روی $K$، $W_i$ و $V_i$ می‌باشند. دراین‌صورت به ازای هر $f\in K$ خواهیم داشت $P_K(f)=f$. لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f)\right\|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f)\right\|^2\\
=\;&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(P_K(f))\right\|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(P_K(f))\right\|^2\\
=\;&\sum_{i\in\sigma}\nu_i^2\left\|P_{W_i\cap K}(f)\right\|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^2\left\|P_{V_i\cap K}(f)\right\|^2.
\end{aligned}$$

لذا نتیجه‌ی مورد نظر برقرار است. □

در گزاره زیر نشان داده می‌شود که برای هر بافتی از دنباله‌های بسل، کران بالا به‌طور خودکار برقرار است[۱۱]، هرچند بعداً نشان خواهیم داد که این کران بالا برای قاب‌های تلفیقی در هم تنیده نمی‌تواند بهین باشد.

**گزاره ۴.۲.** *اگر $\{W_{ij}\}_{i\in I, j\in[m]}$ خانواده‌ای از دنباله‌های بسل از زیرفضاها با وزن‌های $\{v_{ij}\}_{i\in I, j\in[m]}$ و با کران‌های $\mathcal{B}_j$، به ازای هر $j\in[m]$، در $\mathbb{H}$ باشند، در این‌صورت هر بافته‌ای از این دنباله‌ها نیز بسل خواهد بود.*

*اثبات.* به ازای هر افراز $\{\sigma_j\}_{j\in[m]}$ از $I$ و نیز به ازای هر $f\in\mathbb{H}$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i\in\sigma_j} v^2\left\|P_{W_{ij}}(f)\right\|^2 \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty} v^2\left\|P_{W_{ij}}(f)\right\|^2 \le \sum_{j=1}^{m}\mathcal{B}_j\left\|f\right\|^2.$$

بنابراین حکم برقرار است. □

**کاربرد:**

فرض کنید $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathbb{H}$ باشد و نیز فضای هیلبرت $\mathbb{H}=\ell^2(\mathbb{N})$ را در نظر می‌گیریم. همچنین به ازای هر $i\in\mathbb{N}$، فرض می‌کنیم $H_i=\overline{span}\{e_k\}_{k=i}^{\infty}$ و $\{e_{ij}\}_{j=1}^{\infty}=\{e_{i+j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ پایه متعامد یکه برای هر $H_i$ باشد.

**مثال ۵.۲.** دنباله‌های $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{P'_i\}_{i=1}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم که برای ثابت دلخواه $i\in\mathbb{N}$، نگاشت‌های $P_i:\mathbb{H}\longrightarrow\overline{span}\{e_i\}$ و $P'_i:\mathbb{H}\longrightarrow\overline{span}\{e_i,e_{i+1}\}$ تصویر متعامد به روی زیرمجموعه‌های متناهی بُعدِ مورد نظر باشند. فرض کنید که:

$$f_{i,j}=P_i(e_{i,j}),\qquad g_{i,j}=P'_i(e_{i,j}),$$

به وضوح خواهیم داشت:

$$f_{i,j} = P_i\left(e_{i+j-۱}\right) = \begin{cases} e_i & j = ۱ \\ ۰ & j > ۱ \end{cases} \qquad و \qquad g_{i,j} = P'_i\left(e_{i+j-۱}\right) = \begin{cases} e_i & j = ۱ \\ e_{i+۱} & j = ۲ \\ ۰ & j > ۲ \end{cases}$$

پس داریم:

$$\sum_{i=۱}^{\infty}\sum_{j=۱}^{\infty}\left|\langle f, f_{i,j}\rangle\right|^{۲} = \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, f_{i,۱}\rangle\right|^{۲} = \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, e_i\rangle\right|^{۲} = \left\|f\right\|^{۲},$$

لذا $\left\{f_{i,j}\right\}_{i,j=۱}^{\infty}$ یک قاب تنگ با کران $\mathcal{A} = \mathcal{B} = ۱$ می‌باشد. همچنین:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{\infty}\sum_{j=۱}^{\infty}\left|\langle f, g_{i,j}\rangle\right|^{۲} &= \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, g_{i,۱}\rangle\right|^{۲} + \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, g_{i,۲}\rangle\right|^{۲} \\ &= \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, e_i\rangle\right|^{۲} + \sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, e_{i+۱}\rangle\right|^{۲} \\ &= ۲\left\|f\right\|^{۲} - \left|\langle f, e_۱\rangle\right|^{۲},\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که $\left\{g_{i,j}\right\}_{i,j=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران‌های $\mathcal{A} = ۱$ و $\mathcal{B} = ۲$ است به‌طوری که هر دو قاب تشکیل قاب درهم تنیده برای $\mathbb{H}$ می‌دهند. چون به ازای هر زیرمجموعه‌ی دلخواه $\sigma \subset \mathbb{N}$ و نیز به ازای هر $f \in \mathbb{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\|^{۲} &\leq \sum_{i\in\sigma}\sum_{j=۱}^{\infty}\left|\langle f, f_{i,j}\rangle\right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j=۱}^{\infty}\left|\langle f, g_{i,j}\rangle\right|^{۲} \\
&= \sum_{i\in\sigma}\left|\langle f, f_{i,۱}\rangle\right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C}\left|\langle f, g_{i,۱}\rangle\right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C}\left|\langle f, g_{i,۲}\rangle\right|^{۲} \\
&= \sum_{i\in\sigma}\left|\langle f, e_i\rangle\right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C}\left|\langle f, e_i\rangle\right|^{۲} + \sum_{i\in\sigma^C}\left|\langle f, e_{i+۱}\rangle\right|^{۲} \\
&\leq ۲\sum_{i=۱}^{\infty}\left|\langle f, e_i\rangle\right|^{۲} \\
&= \left\|f\right\|^{۲}.
\end{aligned}$$

حال اگر به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، مجموعه‌ی $\mathbb{J}_i = \mathbb{N}$ و زیرفضاهای

$$W_i = \overline{span}\left\{f_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}$$

و

$$V_i = \overline{span}\left\{g_{i,j}\right\}_{j\in\mathbb{J}_i}$$

را داشته باشیم، دراین‌صورت طبق قضیه ۲.۲، قابهای تلفیقی $\{W_i\}_{i=۱}^{\infty}$ و $\{V_i\}_{i=۱}^{\infty}$ تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده خواهند داد.

**مثال ۶.۲.** فرض کنیم $\{P_i\}_{i=۱}^{\infty}$ و $\left\{P'_i\right\}_{i=۲}^{\infty}$ مانند مثال قبل، به غیر از $P'_۱$، باشند. در این‌صورت $\left\{f_{i,j}\right\}_{i,j=۱}^{\infty}$ و $\left\{g_{i,j}\right\}_{i,j=۱}^{\infty}$ تشکیل قاب در هم تنیده نمی‌دهند. چون که برای $\sigma = N\setminus\{۱\}$ و $f = e_۱$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{i\in\sigma}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle e_1, f_{i,j}\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\langle e_1, g_{i,j}\rangle\right|^2$$
$$=\sum_{i\in\sigma}\left|\langle e_1, P_i(e_{i,1})\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C}\left|\langle e_1, P'_i(e_{i,1})\rangle\right|^2$$
$$=\sum_{i\in\sigma}\left|\langle e_1, e_i\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C, i\neq 1}\left|\langle e_1, e_i)\rangle\right|^2+\sum_{i\in\sigma^C, i\neq 1}\left|\langle e_1, e_{i+1}\rangle\right|^2$$
$$=\sum_{i\in N\setminus 1}\left|\langle e_1, e_i\rangle\right|^2+\left|\langle e_1, 0\rangle\right|^2$$
$$=0<\mathcal{A}\left\|e_1\right\|^2,$$

و این یک تناقض است. بنابراین طبق قضیه ۲.۲، می‌توان نتیجه گرفت که $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده نمی‌دهند.

**قضیه ۷.۲.** *فرض کنیم $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ با وزن‌های به ترتیب $\{\nu_i\}_{i\in I}$ و $\{\mu_i\}_{i\in I}$ قاب‌های تلفیقی برای $\mathbb{H}$ باشند. همچنین به ازای هر دو مجموعه‌ی متناهی $I, J\subset I$ و هر $\varepsilon>0$، زیرمجموعه‌های $\sigma,\delta\subset I\setminus(I\bigcup J)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که کران پائین قاب تلفیقی $\{W_i\}_{i\in(I\bigcup\sigma)}\bigcup\{V_i\}_{i\in(J\bigcup\delta)}$ کمتر از $\varepsilon$ می‌باشد. آنگاه زیرمجموعه $\mathcal{M}\subset N$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{W_i\}_{i\in\mathcal{M}}\bigcup\{V_i\}_{i\in\mathcal{M}^C}$ قاب تلفیقی نخواهد بود. بنابراین قاب‌های تلفیقی $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده نخواهند داد.*

*اثبات.* گیریم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. طبق فرضیات قضیه برای $I_0=J_0=\phi$، میتوان $\sigma_1\subset I$ را چنان انتخاب کرد به‌طوری‌که $\delta_1=\sigma_1^c$. پس کران پائین برای قاب $\{W_i\}_{i\in\sigma_1}\bigcup\{V_i\}_{i\in\sigma_1^c}$ کمتر از $\varepsilon$ خواهد بود. بنابراین عضو $f_1\in\mathbb{H}$ از فضا با شرط $\|f_1\|=1$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\sum_{i\in\sigma_1}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_1)\right\|^2+\sum_{i\in\delta_1}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_1)\right\|^2<\varepsilon.$$

چون که $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ قاب‌های تلفیقی هستند، پس:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_1)\right\|^2+\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_1)\right\|^2<\infty,$$

لذا ثابت مثبت $k_1$ وجود دارد طوری که:

$$\sum_{i=k_1+1}^{\infty}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_1)\right\|^2+\sum_{i=k_1+1}^{\infty}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_1)\right\|^2<\infty.$$

فرض کنیم $I_1=\sigma_1\bigcap[k_1]$ و $J_1=\delta_1\bigcap[k_1]$. آنگاه $I_1\bigcap J_1=\phi$ و $I_1\bigcup J_1=[k_1]$. طبق فرضیات زیرمجموعه‌های $\sigma_2,\delta_2\subset[k_1]^c$ با خاصیت $\delta_2=[k_1]^c\setminus\sigma_2$ وجود دارند به‌طوری که کران پائین قاب تلفیقی $\{W_i\}_{i\in(I\bigcup\sigma_2)}\bigcup\{V_i\}_{i\in(J_2\bigcup\delta_2)}$ کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ خواهد بود. به عبارتی دیگر بردار $f_2\in\mathbb{H}$ با ویژگی $\|f_2\|=1$ چنان وجود دارد که:

$$\sum_{i\in(I_1\bigcup\sigma_2)}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_2)\right\|^2+\sum_{i\in(J_1\bigcup\delta_2)}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_2)\right\|^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

مانند بالا $k_2>k_1$ وجود دارد طوری که:

$$\sum_{i=k_2+1}^{\infty}\nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_2)\right\|^2+\sum_{i=k_2+1}^{\infty}\mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_2)\right\|^2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

گیریم $I_2=I_1\bigcup(\sigma_2\bigcap[k_2])$ و $J_2=J_1\bigcup(\delta_2\bigcap[k_2])$، به‌طوری که $I_2\bigcap J_2=\phi$ و $I_2\bigcup J_2=[k_2]$. لذا به کمک استقرا می‌توان دنباله‌ها و مجموعه‌های زیر را نتیجه گرفت:

۱. دنباله‌ای از اعداد طبیعی $\{k_i\}_{i\in I}$ با ویژگی $k_i<k_{i+1}$ به ازای هر $i\in I$، وجود دارد،

۲. دنباله‌ای از بردارهای $\{f_i\}_{i\in I}$ از $\mathbb{H}$ با ویژگی $\|f_i\|=1$ به ازای هر $i\in I$، وجود دارد،

۳. به‌ازای هر $i\in I$ مجموعه‌های $\sigma_i\subset[k_{i-1}]^c,\delta_i=[k_{i-1}]^c\setminus\sigma_i$ وجود خواهند داشت و نیز

۴. به‌ازای هر $i\in I$ مجموعه‌های $I_i=I_{i-1}\bigcup(\sigma_i\bigcap[k_i])$ و $J_i=J_{i-1}\bigcup(\delta_i\bigcap[k_i])$ وجود

خواهند داشت، به‌طوری که در نامساوی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$\sum_{i\in(I_{n-1}\cup\sigma n)} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_n)\right\|^2+\sum_{i\in(J_{n-1}\cup\delta n)} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_n)\right\|^2<\frac{\varepsilon}{n}, \qquad (*)$$

و

$$\sum_{i=k_n+1}^{\infty} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_n)\right\|^2+\sum_{i=k_n+1}^{\infty} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_n)\right\|^2<\frac{\varepsilon}{n}. \qquad (**)$$

حال به کمک روابط $I_i\bigcap J_i=\phi$ و $I_i\bigcup J_i=[k_i]$، اگر فرض کنیم $\mathcal{M}=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$، آنگاه $\mathcal{M}^c=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$، به‌طوری که $\mathcal{M}\bigcup\mathcal{M}^c=I$. لذا طبق نامساوی‌های $(*)$ و $(**)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in\mathcal{M}} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_i)\right\|^2+\sum_{i\in\mathcal{M}^c} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_i)\right\|^2\\
=&\left(\sum_{i\in I_n} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_n)\right\|^2+\sum_{i\in J_n} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_n)\right\|^2\right)\\
+&\left(\sum_{i\in\mathcal{M}\bigcap[k_n]^c} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_i)\right\|^2+\sum_{i\in\mathcal{M}^c\bigcap[k_n]^c} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_i)\right\|^2\right)\\
\leq&\left(\sum_{i\in I_{n-1}\cup\sigma n} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_n)\right\|^2+\sum_{i\in J_{n-1}\cup\delta n} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_n)\right\|^2\right)\\
+&\left(\sum_{i=k_n+1}^{\infty} \nu_i^2\left\|P_{W_i}(f_i)\right\|^2+\sum_{i=k_n+1}^{\infty} \mu_i^2\left\|P_{V_i}(f_i)\right\|^2\right)\\
<&\ \frac{\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{n}=\frac{2\varepsilon}{n}.
\end{aligned}$$

بنابراین کران پائین قاب تلفیقی $\{W_i\}_{i\in\mathcal{M}}\bigcup\{V_i\}_{i\in\mathcal{M}^c}$ برابر صفر است و این یک تناقض است. پس

$\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ نمی‌توانند قاب تلفیقی در هم تنیده تشکیل دهند. □

در گزاره زیر نشان می‌دهیم که کران بالای معرفی شده در گزاره ۴.۲ برای قاب‌های تلفیقی در هم تنیده نمی‌تواند بهین باشد:

**گزاره ۸.۲.** *گیریم $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ با وزن‌های به‌ترتیب $\{\nu_i\}_{i\in I}$ و $\{\mu_i\}_{i\in I}$ قاب‌های تلفیقی برای $\mathbb{H}$ با کران‌های بالای بهین $\mathcal{B}_۱$ و $\mathcal{B}_۲$ باشند به‌طوری که تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده برای $\mathbb{H}$ می‌دهند. آنگاه $\mathcal{B}_۱ + \mathcal{B}_۲$ نمی‌تواند به عنوان کران بالای بهین برای این قاب تلفیقی در هم تنیده باشد.*

*اثبات.* اثبات را با برهان خلف پیش می‌بریم. فرض می‌کنیم $\mathcal{B}_۱ + \mathcal{B}_۲$ کوچکترین کران بالا برای این قاب تلفیقی در هم تنیده باشد. پس طبق تعریف کران بالای بهین می‌توان $\sigma \subset I$ و $f \in \mathbb{H}$ را با ویژگی $\|f\| = ۱$ چنان انتخاب کرد که:

$$\sup_{\|f\|=۱}\left(\sum_{i\in\sigma}\nu_i^۲\left\|P_{W_i}(f)\right\|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^۲\left\|P_{V_i}(f)\right\|^۲\right) = \mathcal{B}_۱ + \mathcal{B}_۲.$$

پس طبق خاصیت سوپریمم، به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عضو $f \in \mathbb{H}$ وجود دارد به‌طوری که:

$$\sum_{i\in\sigma}\nu_i^۲\left\|P_{W_i}(f)\right\|^۲ + \sum_{i\in\sigma^C}\mu_i^۲\left\|P_{V_i}(f)\right\|^۲ \geq \mathcal{B}_۱ + \mathcal{B}_۲ - \varepsilon,$$

لذا طبق ویژگی کران بالای قاب می‌توان نوشت:

$$\sum_{i\in I}\nu_i^۲\left\|P_{W_i}(f)\right\|^۲ + \sum_{i\in I}\mu_i^۲\left\|P_{V_i}(f)\right\|^۲ \leq \mathcal{B}_۱ + \mathcal{B}_۲,$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{i\in I\setminus\sigma}\nu_i^۲\left\|P_{W_i}(f)\right\|^۲ + \sum_{i\in I\setminus\sigma^C}\mu_i^۲\left\|P_{V_i}(f)\right\|^۲ \leq \varepsilon.$$

حال اگر گیریم $\sigma_1 = I \setminus \sigma$، بنابراین $\sigma_1^c = I \setminus \sigma^c$. لذا خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in\sigma_1} \nu_i^2 \left\|P_{W_i}(f)\right\|^2 + \sum_{i\in\sigma_1^C} \mu_i^2 \left\|P_{V_i}(f)\right\|^2 \le \varepsilon,$$

و این نشان می‌دهد که بافته‌ای وجود دارد که کران پائین آن به صفر میرسد. پس طبق قضیه ۷.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $\{W_i\}_{i\in I}$ و $\{V_i\}_{i\in I}$ نمی‌توانند تشکیل قاب تلفیقی در هم تنیده دهند که این برخلاف فرض گزاره است. □

## تشکر و قدردانی

بدینوسیله از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران گرامی و همچنین اعضای محترم هیأت تحریریه‌ی مجله که در بهبود نتایج مقاله مؤثر بودند کمال تشکر و قدردانی را می‌نماییم.

## مراجع

[1] F. Arabyani Neyshaburi and A. Arefijamaal, Weaving Hilbert space fusion frames, *arXiv:1802.03352 [math.FA]*, 1–13.

[2] T. Bemrose, P.G. Casazza, K. Gröchenig, M.C. Lammers and R.G. Lynch, Weaving Frames, Oper. Matrices, **10**(4) (2016), 1093–1116.

[3] P.G. Casazza, D. Freeman and R.G. Lynch, Weaving Schauder frames, *J. Approx. Theory*, 211 (2016), 42–60.

[4] P.G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of Subspaces, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **345** (2004), 87–113.

[5] P.G. Casazza, G. Kutyniok and Sh. Li, Fusion frames and distributed processing, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **25** (2008), 114–132.

[6] P.G. Casazza and R.G. Lynch, Weaving properties of Hilbert space frames, *International Conference on SampTA*, (2015), 110–114.

[7] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Basis*, Birkhäuser, Boston, (2016).

[8] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, **27**(1271) (1986), 1271–1283.

[9] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72**(2) (1952), 341–366.

[10] L.K. Vashisht and Deepshikha, On continuous weaving frames, *Adv. Pure Appl. Math.*, **8**(1) (2017), 15–31.

[11] L.K. Vashisht, Deepshikha, S. Garg and G. Verma , On weaving fusion frames for Hilbert spaces, *International Conference on SampTA*, (2017), 381–385.

[12] L.K. Vashisht, S. Garg, Deepshikha and P.K. Das, On generalized weaving frames in Hilbert spaces, *Rocky Mountain J. Math.*, **48**(2) (2018), 661–685.