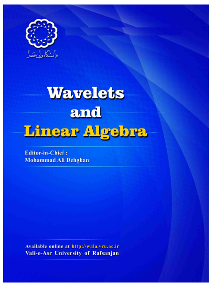
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۱۷۹-۱۹۲



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

نگهدارنده‌های جمعی وارون دریزین روی فضای $B_s(H)$

مریم دهقان‌نیری[آ]، مینا جمشیدی[*آ]

[آ] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان ، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۲ تیر ۱۴۰۰
پذیرفته شده: ۴ آبان ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: علی تقوی

کلمات کلیدی:
نگاشت نگهدارنده، فضای عملگرهای خودالحاق، وارون دریزین.

چکیده

فرض کنید $B_s(H)$ جبر جردن همه عملگرهای خودالحاق کراندار روی فضای جدایی‌پذیر هیلبرت H باشد. در این مقاله به بررسی همه نگاشت‌های جمعی و دوسویی $\phi : B_s(H) \longrightarrow B_s(H)$ که وارون دریزین عملگرها(درصورت وجود) را حفظ می‌نمایند، می‌پردازیم. نتیجه اصلی این مقاله به این شکل است که اگر برای هر عملگر تصویر P روابط $\phi(\mathbb{R}P) \subset \mathbb{R}\phi(P)$ و $\phi(PB_s(H)P) = \phi(P)B_s(H)\phi(P)$ برقرار باشند، آنگاه عملگر یکانی یا پادیکانی $U : H \to H$ وجوددارد به طوری‌که $\phi(T) = UTU^*$، برای هر $T \in B_s(H)$.

[*] نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: maryamdnayeri@gmail.com (مریم دهقان‌نیری)، m.jamshidi@kgut.ac.ir (مینا جمشیدی).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.533966.1334

۱. مقدمه

پژوهش در مورد نگاشت‌هایی که خواص خاصی از عملگرها را حفظ می‌نمایند از سالیان دور مورد توجه پژوهشگران بوده است و بستگی به خطی یا غیرخطی بودن نگاشت، به مسأله‌های نگهدارنده خطی یا غیرخطی مشهور می‌باشند. در این مسأله‌ها اغلب نگاشت‌های نگهدارنده ویژگی‌های خاصی مورد بررسی قرار می‌گیرند(به عنوان مثال به [۸، ۱۳، ۱۰، ۱۶] مراجعه شود .) یکی از ویژگی‌های مورد علاقه وارون‌پذیر بودن است؛ یعنی تحقیق در مورد نگاشت‌هایی که ویژگی وارون‌پذیری عملگرها را حفظ می‌نمایند(به عنوان مثال در [۱، ۳، ۴، ۶، ۱۹] در این زمینه، تحقیقاتی انجام شده است).
برای عملگرها، وارون‌پذیری‌های متنوعی تعریف شده‌است؛ از جمله وارون‌پذیری مور–پنرز و وارون دریزین و ... قابل تعریف می‌باشند. به طور کلی وارون تعمیم‌یافته به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱. [۹] فرض کنید $\mathcal{A}$ جبری از عملگرها باشد و $A \in \mathcal{A}$. عملگر A^g را وارون تعمیم یافته عملگر A گویند، هر گاه $AA^gA = A$.

در برخی منابع شرط $A^gAA^g = A^g$ را علاوه بر شرط ذکر شده نیز بیان می‌نمایند. با توجه به این تعریف و افزودن شرایط جدید می‌توان انواع جدیدی از وارون‌ها را برای عملگرها تعریف کرد، که از جمله آنها وارون دریزین می‌باشد که نخستین بار توسط دریزین در سال ۱۹۵۸ روی نیم‌گروه‌ها تعریف شد [۵]. دریزین تعریف را اینگونه بیان‌نمود که فرض‌کنید $\mathcal{G}$ یك نیم‌گروه باشد، عضو $a \in \mathcal{G}$ را دارای وارون دریزین گوییم هرگاه $x \in \mathcal{G}$ موجود باشد به طوری‌که

$$ax = xa, \quad xax = x, \quad a^{k+1}x = a^k.$$

با نماد H،$B(H)$و $B_s(H)$ به ترتیب فضای هیلبرت مختلط یا حقیقی با بعد نامتناهی، فضای همه عملگرهای خطی کراندار و فضای همه عملگرهای خودالحاق کراندار روی H را نمایش می‌دهیم. تعریف ذکرشده را برای فضاهای برداری از جمله $B(H)$ نیز می‌توان ارایه نمود.

تعریف ۲.۱. [۵] الف) عملگر $T \in B(H)$ را دارای وارون دریزین گویند هر گاه عملگر $A \in B(H)$ و عدد طبیعی $k \in \mathbb{N}$ موجود باشند به طوریکه

$$TA = AT, \quad ATA = A, \quad T^{k+1}A = T^k.$$

ب) اگر $T \in B(H)$ وارون‌پذیر دریزین باشد، وارون دریزین آن را، که با T^D نمایش می‌دهیم، عملگر یکتایی تعریف می‌کنیم که شرط سوم برای کوچکترین عدد k برقرارباشد؛ به این عدد اندیس T گویند و با نماد $Ind(T)$ نمایش می‌دهند.

۲. بیان مسأله مورد تحقیق

همانطور که گفته‌شد بررسی نگاشت‌هایی که وارون‌پذیری را حفظ می‌نمایند، از اهمیت برخوردار می‌باشد. در ادامه تعریف نگاشت‌های نگهدارنده وارون دریزین را ارایه می‌نماییم.

تعریف ۱.۲. فرض‌کنید $\mathcal{A}$ جبری از عملگرها باشد. نگاشت $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را نگهدارنده وارون دریزین گویند هر گاه برای هر عملگر دارای وارون دریزین $A \in \mathcal{A}$، رابطه $\varphi(A^D) = \varphi(A)^D$ برقرار باشد.

تحقیقاتی در رابطه با نگهدارنده های وارون تعمیم یافته انجام شده است، از جمله در قضیه زیر ساختار نگاشت‌های جمعی روی $B(H)$ که وارون دریزین را حفظ می‌نمایند، مورد بررسی قرارگرفته‌است.

قضیه ۲.۲. *[۴] فرض‌کنیم H و K دو فضای هیلبرت مختلط یا حقیقی با بعد نامتناهی باشند و $\psi : B(H) \to B(K)$ نگاشتی جمعی باشد. همچنین فرض‌کنید که برد ψ شامل همه عملگرهای خودتوان مینیمال در $B(K)$ باشد. اگر $\psi(T^D) = \psi(T)^D$ برای هر عملگر وارون‌پذیر دریزین $T \in B(H)$، آنگاه ψ یا همه عملگرهای خودتوان مینیمال را صفر می‌کند و یا عملگر خطی یا پادخطی کراندار دوسویی $A : H \to K$ موجود است به طوری‌که $\psi(T) = \xi ATA^{-1}$ برای هر $T \in B(H)$ یا $\psi(T) = \xi AT^tA^{-1}$ برای هر $T \in B(H)$ که در اینجا $\xi = \pm 1$ و T^t ترانهاده T با در نظرگرفتن یك پایه متعامد ثابت روی فضای H می‌باشد.*

یکی از معروفترین مثالها برای نگهدارنده‌های دریزین از دو جهت، همریختی‌های جردن می‌باشند، در واقع در [۱۲] قضیه ۱.۲ ثابت شده که اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبر باشند و $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ همریختی جردن باشد(یعنی $\phi(a^2) = \phi(a)^2$)، آنگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ که دارای وارون دریزین باشد رابطه $\phi(a^D) = \phi(a)^D$ برقرار است.

زمانی که مسأله‌ای روی $B(H)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد، سؤال بعدی که اغلب به ذهن خطور می‌کند این است این مسأله روی $B_s(H)$ به چه نتیجه‌ای منجر خواهد شد. در واقع اهمیت تحقیق روی $B_s(H)$

از این بابت است که این فضا به عنوان فضای مشاهده‌گرهای کراندار[۱] در فیزیك اهمیت خاصی دارد. به طور مثال مولنار و همکارانش در [۱۴] به مشخصه سازی همه نگاشتهای $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ پرداختند که خاصیت جابجایی را از دو جهت حفظ می‌نماید. یعنی برای هر $A, B \in B_s(H)$ رابطه $AB = BA$ اگر و تنها اگر $\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A)$ برقرار باشد؛ حال اینکه این موضوع جداگانه روی جبرهای دیگر از جمله $B(H)$ مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته بود و یا نیری و همکاران در [۱۵] نگاشتهایی روی $B_s(H)$ را بررسی نموده اند که جبری بودن و وارون پذیری عملگرها را از دو جهت حفظ نمایند، و در مورد این موضوع روی فضای $B(H)$ قبلا در [۱۸] تحقیق انجام شده است.

با توجه به توضیحات ارایه شده و نیز در نظر گرفتن قضیه ۲.۲ یکی از مسائل مورد توجه می‌تواند بررسی نگاشت‌های جمعی روی $B_s(H)$ که وارون دریزین را حفظ می‌نمایند، باشد.

نکته قابل توجه در بررسی نگاشتهای نگهدارنده روی $B_s(H)$ که قبلا مشابه آن روی $B(H)$ ثابت شده است این می باشد که از آنجا در اثبات قضایای مربوط به نگاشتهای روی فضای $B(H)$ خودالحاق بودن عملگرها درنظرگرفته نمی شود، بنابراین به راحتی نمی توان از خود آن قضیه ها و حتی قضیه های کمکی که در اثباتشان آمده است، برای بررسی نگاشتها روی $B_s(H)$ استفاده نمود. به عنوان مثال در بررسی نگاشتهای ϕ که در شرایط قضیه ۲.۲ صدق می کنند اثبات به بررسی نگاشتهایی که عملگرهای خودتوان را حفظ می کنند منجر می شود، این نگاشتها قبلا روی $B(H)$ مشخص شده اند، اما بررسی این نگاشتها روی $B_s(H)$ انجام نشده است. در این مقاله راهکاری بدون نیاز به نگهدارنده های خودتوان روی $B_s(H)$ ارایه می شود.

برای ادامه چند نماد مورد نیاز را معرفی می‌نماییم. برای هر $T \in B(H)$ نمادهای $Ran(T)$، $Ker(T)$و$\mathrm{rank}(T)$ به ترتیب برای برد، فضای پوچ و رتبه عملگر T به کار می‌رود، همچنین با نماد $B_{sf}(H)$ فضای همه عملگرهای خودالحاق با رتبه متناهی را نمایش می‌دهیم.

۳. برخی خواص مقدماتی عملگرهای دارای وارون دریزین

در این بخش برخی خواص و ویژگی‌های عملگرهای دارای وارون دریزین مورد مطالعه قرار می‌گیرد که در اثبات‌های اصلی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

---
[1] bounded observables

لم ۱.۳. *ویژگی‌های زیر برای عملگر $T \in B(H)$ برقرار می‌باشد:*

- *اگر $T \in B(H)$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه وارون‌پذیر دریزین است و $T^D = T^{-1}$.*
- *اگر $T \in B(H)$ وارون‌پذیر دریزین باشد، آنگاه وارون دریزین آن یکتاست.*
- *اگر $Ind(T) = 0$، آنگاه وارون دریزین، T^D، همان وارون معمولی T است یعنی $T^D = T^{-1}$.*
- *اگر $T \in B(H)$ دارای وارون دریزین باشد و $Ind(T) = k$ ، آنگاه $ran(T^k)$ بسته است [۴].*
- *اگر $T \in B(H)$ دارای وارون دریزین T^D ، باشد آنگاه $TT^D = T^DT$ خودتوان است [۵].*

لم ۲.۳. *[۲] (الف) فرض‌کنید $T \in B(H)$. در اینصورت $ran(T)$ بسته است اگر و تنها اگر عملگر $X \in B(H)$ وجود داشته باشد به طوریکه $TXT = T$.*
ب) برای عملگر $S \in B_s(H)$ که $Ind(S) = k$، می‌توان نمایش

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \tag{۱.۳}$$

را با در نظرگرفتن تجزیه $H = ran(S^k) \bigoplus ran(S^k)^{\perp}$ نوشت.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف) می‌توان به [۲] مراجعه نمود. برای اثبات قسمت (ب) اگر فرض‌کنیم که $Ind(S) = k$، بنابراین طبق تعریف وارون دریزین داریم $S^k = S^{k+1}S^D$ که نتیجه می‌دهد $S^{k+1} = S^kSS^DS$. در نظر بگیریم $y \in ran(S^k)$؛ پس $x \in H$ وجود دارد بطوریکه $S^kx = y$. داریم $S(y) = S(S^kx) = S^k(SS^DSx)$؛ پس $S(y) \in ran(S^k)$ و بنابراین $ran(S^k)$ یک زیر فضای پایا تحت S می‌باشد. حال با در نظر گرفتن فضای H به صورت $H = ran(S^k) \bigoplus ran(S^k)^{\perp}$ ، می‌توان نمایش ذکر شده برای S را نوشت. □

گزاره‌های زیر مشابه گزاره‌هایی است که در مراجع [۴] و [۶] برای عملگر $T \in B(H)$ آورده شده است. در اینجا با توجه به نیاز به عملگرها در فضای $B_s(H)$ این گزاره‌ها روی این فضا بیان شده‌اند و اثبات گزاره‌ها مشابه همان اثباتی است که در مراجع ذکر شده آورده شده است.

گزاره ۳.۳. *اگر $S \in B_s(H)$ آنگاه گزاره های زیر هم ارز می‌باشند.*

(الف) S وارون‌پذیر دریزین با $Ind(S) = k$ است.

(ب) S دارای نمایش ماتریسی ۱.۳ *با در نظر گرفتن تجزیه، $H = ran(S^k) \bigoplus ran(S^k)^{\perp}$، می‌باشد که S_1 عملگر خود الحاق وارون‌پذیر روی $ran(S^k)$ می‌باشد و $S_2^k = 0$.*

(ج) عدد طبیعی n موجود است به طوری‌که $H = ran(S^n) \bigoplus ker(S^n)$.

با استفاده از گزاره ذکر شده در لم ۶.۳ ثابت خواهیم کرد که در واقع $Ind(S) = 1$ برقرار است.

گزاره ۴.۳. *فرض‌کنید $S \in B_s(H)$ دارای وارون دریزین S^D با $Ind(S) = k$ باشد. آنگاه S و S^D جابه‌جا می‌شوند و $SS^D = S^DS$ عملگر تصویر متعامد می‌باشد.*

وقتی در فضای $B_s(H)$ وارون دریزین عملگرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم ارتباط جالبی بین این نوع وارون و وارون مور-پنرز عملگرها می‌باشد. در ادامه به تعریف وارون مور-پنرز می‌پردازیم و سپس این ارتباط را تحت عنوان یك لم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۵.۳. [۷] عملگر $A \in B(H)$ را دارای وارون مور-پنرز گویند هر گاه عملگر $C \in B(H)$ موجود باشد به طوریکه

$$ACA = A, \quad CAC = C$$

و عملگرهای AC و CA عملگرهای تصویر باشند.

از نماد $A^\dagger$ برای نشان دادن وارون مور-پنرز عملگر A استفاده می‌نماییم. دو تفاوت اصلی بین وارون مور-پنرز و وارون دریزین عملگرها وجود دارد که به شرح ذیل می‌باشند:

- اگر $A \in B(H)$، آنگاه $AA^D = A^DA$ خودتوان می‌باشد ولی همواره عملگر تصویر نمی‌باشد. در صورتیکه $AA^\dagger$ و $A^\dagger A$ طبق تعریف عملگر تصویر می‌باشند.
- در حالت کلی عملگر A و وارون مور-پنرز آن، $A^\dagger$، با هم جابه جا نمی‌شوند.

در لم زیر بیان می‌نماییم که چگونه وارون مور-پنرز و وارون دریزین در عملگرهای خودالحاق با هم ارتباط دارند.

لم ۶.۳. *اگر عملگر $S \in B_s(H)$ دارای وارون دریزین باشد، آنگاه $Ind(S) = 1$ و وارون دریزین آن، S^D، نیز به فضای $B_s(H)$ متعلق است. همچنین داریم $S^D = S^\dagger$.*

اثبات. فرض کنیم S دارای وارون دریزین باشد و $Ind(S) = k$. داریم

$$(S^D)^*S = S(S^D)^*, \quad (S^D)^*S(S^D)^* = (S^D)^*, \quad S^{k+1}(S^D)^* = S^k$$

بنابراین $(S^D)^*$ نیز وارون دریزین S می‌باشد؛ یکتا بودن وارون دریزین نتیجه می‌دهد که $(S^D)^* = S^D$، بنابراین S^D خودالحاق است. از آنجا که $S \in B_s(H)$، بنابراین $H = \overline{ran(S)} \oplus ker(S)$ و در نتیجه $S = S_1 \oplus 0$. با توجه به اینکه $S^DS = SS^D$، نتیجه می‌شود $S^D ker(S) \subseteq ker(S)$ و $S^D\overline{ran(S)} \subseteq \overline{ran(S)}$. پس

$$S^D = E \oplus F$$

$$(S_1 \oplus 0)(E \oplus F) = S_1E \oplus 0 = (E \oplus F)(S_1 \oplus 0) = (ES_1 \oplus 0)$$

$$(E \oplus F)(S_1 \oplus 0)(E \oplus F) = ES_1E \oplus 0 = E \oplus F$$

و

$$(S_1^{k+1} \oplus 0)(E \oplus F) = S_1^{k+1}E \oplus 0 = S_1^k \oplus 0.$$

بنابراین داریم $S_1E = ES_1$، $ES_1E = E$ ، $F = 0$ و $S_1^{k+1}E = S_1^k$. در نتیجه $S^D = E \oplus 0$ و S_1 وارون‌پذیر با اندیس $h \leq k$ می‌باشد. از سوی دیگر اگر $S_1G = GS_1$، $S_1GS_1 = G$ و $S_1^{h+1}G = S_1^h$، آنگاه

$$(S_1 \oplus 0)(G \oplus 0) = (G \oplus 0)(S_1 \oplus 0)$$

$$(G \oplus 0)(S_1 \oplus 0)(G \oplus 0) = G \oplus 0$$

و

$$(S_1 \oplus 0)^{h+1}(G \oplus 0) = (S_1 \oplus 0)^h$$

که نتیجه می‌دهد $k \leq h$. بنابراین $h = k$ ، یعنی S_1 وارون‌پذیر دریزین با اندیس k می‌باشد و نیز

$S_1^D = E$. با توجه به قسمت (ب) گزاره ۳.۳، S_1 یک‌به‌یک است. داریم $S_1^{h+1}E = S_1$ و یا معادلا $S_1^h(S_1E - I) = 0$. وارون پذیری S_1 نتیجه می‌دهد $S_1E = I$. بنابراین داریم $S_1^2E = S_1$ که نشان می‌دهد $k = 1$. همچنین $\overline{ran(S_1)} = ran(I) = ran(S_1E) \subseteq ran(S_1)$، پس $\overline{ran(S_1)} = ran(S_1)$. بنابراین I روی فضای $\overline{ran(S_1)}$ عملگر همانی است و بنابراین $E = S_1^{-1}$ و در نتیجه S^D کراندار می‌باشد. با توجه به خودالحاق بودن S^D داریم $S^D \in B_s(H)$. پس $S^D = S_1^{-1} \oplus 0$ که نتیجه می‌دهد $S^D = S^\dagger$. □

۴. نتایج اصلی

در این بخش نتایج اصلی این مقاله را ارائه می‌نماییم. برای این امر ابتدا نیاز به بیان دو قضیه می‌باشد که در ادامه آن‌ها را بیان می‌نماییم.

قضیه ۱.۴. *[۱۷] فرض‌کنید H فضای هیلبرت باشد که $\dim(H) \geq 2$، و فرض‌کنید $\phi : B_{sf}(H) \to B_{sf}(H)$ نگاشتی باشد که $\phi(0) = 0$. فرض‌کنید برای هر $A, B \in B_{sf}(H)$، $\phi(A) - \phi(B)$ رتبه یک است اگر و تنها اگر $A - B$ چنین باشد. آنگاه یکی از حالات زیر برقرار است:*

الف) عملگر رتبه یک $R \in B_{sf}(H)$ وجوددارد به طوریکه $Ran(\phi) \subset \langle R \rangle$.

ب) نگاشت یک‌به‌یک خطی یا پادخطی $\tau : H \to H$ وجوددارد به طوری‌که

$$\phi(F) = \epsilon \sum_{j=1}^{k} t_j \tau e_j \otimes \tau e_j \tag{۱.۴}$$

که $\epsilon \in \{-1, +1\}$. در اینجا فرض‌شده است $F = \sum_{j=1}^k t_j e_j \otimes e_j$ که $k \in \mathbb{N}$، $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset \mathbb{R}$ و $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\} \subset H$ مجموعه متعامد یکه می‌باشد.

قضیه ۲.۴. *[۱۱] فرض‌کنید $T \in B_s(H)$. در اینصورت می‌توان T را به صورت ترکیب حقیقی از پنج عملگر تصویر نوشت.*

همچنین به لم زیر نیاز داریم که دقیقا مشابه لم ۱.۲ در [۴] اثبات می‌شود و برای راحتی خواننده اثبات آن آورده می‌شود.

لم ۳.۴. *فرض‌کنید $\phi : B_s(H) \longrightarrow B_s(H)$ نگاشتی جمعی و دوسویی و نگهدارنده وارون دریزین باشد. آنگاه گزاره های زیر برای هر عملگر خودتوان $P \in B_s(H)$ نتیجه می‌شود.*

(الف) $\phi(I)\phi(P) = \phi(P)\phi(I)$.

(ب) $\phi(P) = \phi(P)^2\phi(I) = \phi(P)\phi(I)^2$.

اثبات. برای هر عدد گویای α و هر عملگر خودتوان $P \in B_s(H)$ عملگر $I + (\alpha - 1)P$ وارون‌پذیر است و $(I + (\alpha - 1)P)^{-1} = I + (\alpha^{-1} - 1)P$. می‌دانیم اگر $T \in B_s(H)$ عملگری وارون‌پذیر باشد، آنگاه وارون‌پذیر دریزین نیز می‌باشد و $T^D = T^{-1}$، بنابراین

$$(I + (\alpha - 1)P)^D = \phi((I + (\alpha - 1)P)^D) = \phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P).$$

بنابراین با توجه به تعریف وارون‌پذیری دریزین

$$(I + (\alpha - 1)P)\phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P) = \phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P)\phi(I + (\alpha - 1)P) \qquad (۲.۴)$$

و

$$(I + (\alpha - 1)P)\phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P)\phi(I + (\alpha - 1)P) = \phi(I + (\alpha - 1)P). \qquad (۳.۴)$$

با توجه به جمعی بودن ϕ گزاره(الف) از رابطه ۲.۴ نتیجه می‌شود.

برای اثبات ادامه توجه کنید که برای هر عملگر خودتوان $P \in B_s(H)$ این عملگر دارای وارون دریزین می‌باشد و $P^D = P$. پس $\phi(I)^3 = \phi(I)$ و $\phi(P)^3 = \phi(P)$. حال از رابطه ۳.۴ و قسمت(الف) نتیجه می‌شود که برای هر عدد گویای α،

$$(2 - \frac{1}{\alpha})\phi(P)\phi(I)^2 + (1 - \frac{2}{\alpha})(\alpha - 1)\phi(P)^2\phi(I) = [1 + \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}\phi(P).$$

چنانچه در رابطه اخیر $\alpha = 2$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ را جایگذاری نماییم به ترتیب $\phi(P) = \phi(P)\phi(I)^2$ و $\phi(P) = \phi(P)^2\phi(I)$ و نتیجه می‌شود، که قسمت (ب) اثبات می‌شود. □

قضیه ۴.۴. *فرض‌کنید $\phi : B_s(H) \longrightarrow B_s(H)$ نگاشتی جمعی و دوسویی و نگهدارنده وارون دریزین باشد و نیز $\dim(H) \geq ۲$. همچنین فرض کنید برای هر عملگر تصویر $P \in B_s(H)$، روابط $\phi(\mathbb{R}P) \subset \mathbb{R}\phi(P)$ و $\phi(PB_s(H)P) = \phi(P)B_s(H)\phi(P)$ برقرار باشند. در این صورت برای $A \in B_s(H)$، $rank(A) = ۱$ اگر و تنها اگر $rank\phi(A) = ۱$.*

اثبات. ابتدا ثابت می‌نماییم برای هر $T \in B_s(H)$،

(الف) $\phi(I)\phi(T) = \phi(T)\phi(I)$.

(ب) $\phi(T) = \phi(T)^۲\phi(I) = \phi(T)\phi(I)^۲$.

عملگر تصویر P را در نظر بگیرید. طبق فرض داریم $\phi(\mathbb{R}P) \subset \mathbb{R}\phi(P)$، بنابراین نگاشت خطی τ روی $\mathbb{R}$ موجود است به طوری‌که $\phi(P) = \tau(\lambda)\phi(P)$. حال برای هر $x \in H$

$$\begin{aligned}
[\phi(I)\phi(P)][\tau(\lambda)x] &= \phi(I)[\phi(P)(\tau(\lambda)x)] \\
&= \phi(I)[\tau(\lambda)\phi(P)(x)] \\
&= \phi(I)\phi(\lambda P)(x)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
[\phi(P)\phi(I)](\tau(\lambda)x) &= \phi(P)[\phi(I)(\tau(\lambda)x)] \\
&= \phi(P)[(\tau(\lambda)\phi(I))x)] \\
&= \tau(\lambda)\phi(P)\phi(I)(x) \\
&= \phi(\lambda P)\phi(I)(x)
\end{aligned}$$

از این روابط و لم ۳.۴ نتیجه می‌شود

$$\phi(I)\phi(\lambda P) = \phi(\lambda P)\phi(I). \qquad (۴.۴)$$

حال با در نظر گرفتن ویژگی جمعی بودن ϕ و اینکه هر عملگر خودالحاق را می‌توان به صورت ترکیب

خطی حقیقی پنج عملگر تصویر نوشت، نتیجه می‌شود که

$$\phi(I)\phi(T) = \phi(T)\phi(I).$$

قسمت(ب) همانند قسمت (الف) اثبات می‌گردد.
از آنجا که ϕ پوشا است، برد ϕ شامل همه عملگرهای تصویر رتبه یك در $B_s(H)$ می‌باشد. با توجه به روابطی که اثبات شد، برای هر بردار یکه $x \in H$، روابط $\phi(I)x\otimes x = x\otimes x\phi(I)$ و $x\otimes x = x\otimes x\phi(I)^2$ برقرار است؛ که $\phi(I) = \pm I$ را نتیجه می‌دهد. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\phi(I) = I$. پس با توجه به روابط اثبات شده، ϕ عملگرهای تصویر حفظ می‌نماید.
در ادامه ثابت می‌کنیم که ϕ عملگرهای تصویر رتبه یك را حفظ می‌نماید. فرض‌کنید که P عملگر تصویر رتبه یك باشد. داریم $PB_s(H)P = \mathbb{R}P$. پس $\phi(PB_s(H)P) = \phi(\mathbb{R}P) = \phi(P)B_s(H)\phi(P)$. بنابراین $\phi(P)$ عملگری رتبه یك می‌باشد.
حال فرض کنیم $A \in B_s(H)$ عملگری با رتبه یك باشد. می‌دانیم $x \in H$ و $t \in \mathbb{R}$ وجوددارد به طوری‌که $A = tx \otimes x = t\|x\|^2 \frac{x}{\|x\|} \otimes \frac{x}{\|x\|} = \lambda y \otimes y$، که در اینجا $\|y\| = 1$ و در نتیجه $y \otimes y$ عملگری از رتبه یك می‌باشد. از آنجا که $\phi(A) = \tau(\lambda)\phi(y \otimes y)$ با توجه به توضیحات داده شده نتیجه می‌شود که رتبه $\phi(A)$ برابر یك است. اثبات برعکس کاملا مشابه است. $\square$

قضیه ۵.۴. *فرض‌کنیم $\phi : B_s(H) \longrightarrow B_s(H)$ نگاشتی جمعی و دوسویی و نگهدارنده وارون دریزین باشد و نیز $\dim(H) \geq 2$. همچنین برای هر عملگر تصویر $P \in B_s(H)$، روابط $\phi(\mathbb{R}P) \subset \mathbb{R}\phi(P)$ و $\phi(PB_s(H)P) = \phi(P)B_s(H)\phi(P)$ برقرار باشند. در این صورت عملگر یکانی یا پادیکانی U وجوددارد به طوری‌که*

$$\phi(T) = U^*TU, \qquad \forall T \in B_s(H).$$

اثبات. ابتدا فرض‌کنید $P \in B_s(H)$ عملگر تصویر باشد. پس $P = \sum_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha$، که $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ مجموعه ای از عملگرهای تصویر متعامد با رتبه یك می‌باشد. ثابت می‌نماییم $\phi(P) = \sum_{\alpha\in\Lambda} \phi(P_\alpha)$. داریم:

$$\phi(P)\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(P_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(P_\alpha)\phi(P) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(P_\alpha).$$

حال فرض‌کنید $G = \phi(P) - \sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(P_\alpha)$. با توجه به اینکه $\phi(PB_s(H)P) = \phi(P)B_s(H)\phi(P)$، پس $R \in PB_s(H)P$ وجوددارد به طوری‌که $\phi(R) = G$. از آنجا که $G\phi(P_\alpha) = \phi(P_\alpha)G = ۰$، برای هر $\alpha \in \Lambda$ و با توجه یك‌به‌یك بودن ϕ نتیجه می‌شود که $R \in (I - P_\alpha)B_s(H)(I - P_\alpha)$ و بنابراین $R = RP = R\sum_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha = ۰$. پس $G = ۰$.

جمعی بودن ϕ نتیجه می‌دهد که $\phi(۰) = ۰$. حال با در نظر گرفتن لم ۴.۴، ϕ به صورت یکی از حالاتی که در قضیه ۱.۴ بیان شد می‌باشد. از آنجا که ϕ پوشاست حالت اول اتفاق نمی‌افتد؛ زیرا هر عملگر $T \in B_s(H)$ ترکیب خطی حقیقی حداکثر پنج عملگر تصویر می‌باشد و برای هر عملگر تصویر P داریم $\phi(P) = \sum_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha \subset < R >$، که نتیجه می‌دهد $\phi(B_s(H)) \subset < R >$. پس حالت دوم برقرار است، یعنی عملگر خطی یا پادخطی وارون‌پذیر $U : H \to H$ وجوددارد به طوری‌که $\phi(T) = \lambda UTU^*$، برای هر $T \in B_{sf}(H)$، که $\lambda \in \{-۱, +۱\}$. بردار یکه $f \in H$ را در نظر بگیرید. $I - f \otimes f$ عملگر تصویر می‌باشد و از آنجا که ϕ عملگرهای تصویر را حفظ می‌نماید، پس $\phi(I - f \otimes f) = I - \lambda Uf \otimes fU^*$ نیز عملگر تصویر می‌باشد و در نتیجه $\lambda = ۱$. حال نشان می‌دهیم که U یکانی یا پادیکانی است. بردار یکه $e \in H$ را در نظر بگیرید. $I - e \otimes e$ عملگری تصویر است، پس $I - Ue \otimes eU^*$ یك عملگر تصویر منفرد است، بنابراین $\|Ue\| = ۱$. پس نتیجه می‌گیریم که $\|Ue\| = ۱$، برای هر بردار یکه $e \in H$. بنابراین U یکانی یا پادیکانی می‌باشد.

حال اثبات می‌کنیم $\phi(T) = UTU^*$، برای هر $T \in B_s(H)$. عملگر تصویر P را در نظر بگیرید، توضیحات بالا و شرط $\phi(\mathbb{R}P) \subset \mathbb{R}\phi(P)$ نتیجه می‌دهد

$$\phi(\lambda P) = \tau(\lambda)\phi(P) = \tau(\lambda)\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(P_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(\lambda P_\alpha).$$

بنابراین

$$\phi(\lambda P)U = (\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi(\lambda P_\alpha))U = \sum_{\alpha\in\Lambda}(\phi(\lambda P_\alpha)U) = \sum_{\alpha\in\Lambda}U(\lambda P_\alpha) = U\sum_{\alpha\in\Lambda}\lambda P_\alpha$$

یعنی برای هر عملگر تصویر P رابطه $\phi(\lambda P) = U(\lambda P)$ برقرار است. می دانیم که هر عملگر در $B_s(H)$ به صورت ترکیب خطی حقیقی حداکثر پنج عملگر تصویر نوشته می‌شود، یعنی برای هر $T \in B_s(H)$

عملگرهای تصویر P_1، ...، P_5 موجود است بطوریکه $T = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i P_i$. بنابراین

$$\phi(T)U = \phi(\sum_{i=1}^{5} \lambda_i P_i)U = \sum_{i=1}^{5} \phi(\lambda_i P_i)U = \sum_{i=1}^{5} U(\lambda_i P_i)$$

که نتیجه می دهد $\phi(T)U = UT$. $\square$

مثال ۶.۴. فرض کنید $H = \mathbb{C}^2$ فضای هیلبرت مختلط استاندارد با بعد ۲ باشد. در اینصورت $B_s(H) = \{T_{abc} : \ a, c \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{C}\}$، که

$$T_{abc} = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix}.$$

نگاشت $\Phi : B_s(H) \to B_s(H)$ را به صورت $\Phi(T_{abc}) = T_{c,\bar{b},a}$ تعریف می‌نماییم. این نگاشت عملگرهای دریزین را حفظ می نماید. در واقع در این مثال $U = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ و $\phi(T) = UTU^*$.

قدردانی: نویسندگان بابت راهنمایی های ارزنده استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر رجبعلیپور، از ایشان سپاسگزاری ویژه دارند.

مراجع

[1] A. Armandnejad and M. Jamshidi, Multiplicative isomorphisms at invertible matrices, *Miskolc Mathematical Notes*, **15**(2) (2014), 287–292.

[2] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, second ed., Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] C. Bu, Linear maps preserving Drazin inverses of matrices over fields, *Linear Algebra and its Applications*, **396** (2005), 159–173.

[4] J. Cui, Additive Drazin inverse preservers, *Linear Algebra and its Applications*, **426** (2007), 448–453.

[5] M.P. Drazin, Pseudoinverse in associative rings and semigroups, *American Mathematical Monthly*, **65** (1958), 506–514.

[6] H.K. Du and C.Y. Deng, The representation of characterization of Drazin inverse of operators on a Hilbert space, *Linear Algebra and its Applications*, **407** (2005), 117–124.

[7] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2012.

[8] A.A. Jafarian and A.R. Sourour, Spectrum-preserving linear maps, *Journal of Functional Analysis*, **66**(2) (1986), 255–261.

[9] M. James, The generalised inverse, *Mathematical Gazette*, **62**(420) (1978), 109–114.

[10] M. Jamshidi and F. Fatehi, Projection inequalities and their linear preservers, *Wavelet and Linear Algebra*, **4**(2) (2014), 61–67.

[11] K. Matsumoto, Selfadjoint operators as a real span of 5 projections, *Japanese Journal of Mathematics*, **29** (1984), 291–294.

[12] M. Mbekhta, A Hua type theorem and linear preserver problems, *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, **109A**(2) (2009), 109–121.

[13] S. Mohtashami, A. Armandnejad and M. Jamshidi, On linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$, *Linear Algebra and its Applications*, **459** (2014), 145–153.

[14] L. Molnar and P. Šemrl, Nonlinear commutativity preserving maps on self-adjoint operators, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **56**(4) (2005), 589–595.

[15] M. D. Nayeri, M. Jamshidi and M. Radjabalipour, Singularity preservers on the set of bounded observables, *Annals of Functional Analysis*, **11** (2020), 718–727.

[16] P. Šemrl, Linear maps that preserve the nilpotent operators, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, **61**(1-4) (1995), 523–534.

[17] P. Šemrl, Symmetries on bounded observables: a unified approach based on adjacency preserving maps, *Integral Equations and Operator Theory*, **72** (2012), 7–66.

[18] K. Souilah, On additive preservers of certain classes of algebraic operators, *Extracta Mathematicae*, **30**(2) (2015), 207–220.

[19] X. Zhang, Additive maps preserving Moore–Penrose inverses of matrices on symmetric matrix spaces, *Linear and Multilinear Algebra*, **52**(5) (2004), 349–358.