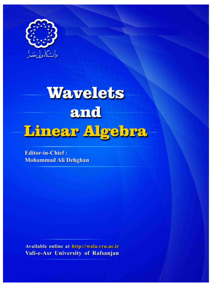
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۷۱-۹۱



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)

رفسنجان

خواصی از عملگرهای با برد بسته و عملگرهای نرمال در C^*-مدول هیلبرت

علیرضا جانفدا[آ]*، جواد فرخی استاد[ب]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

[ب]گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت شده: ۸ تیر ۱۳۹۹

پذیرفته شده: ۷ اردیبهشت ۱۴۰۰

دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: عطاءاله عسکری‌همت

کلمات کلیدی:

C^*-مدول هیلبرت، عملگر مدولی، قانون مرتب معکوس، عملگر مدولی نرمال.

چکیده

هدف این مقاله، تحقیق در مورد عملگرهای مدولی با برد بسته در C^*-مدول هیلبرت است. ما شرایطی که تحت آن قانون مرتب معکوس برای عملگرهای مدولی با برد بسته و تصاویر مدولی برقرار است را ارائه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که برای دو عملگر مدولی A و B با برد بسته، اگر $BA = 0$ آن‌گاه $A^\dagger B^\dagger = 0$. به‌علاوه شرایط جدیدی برای مشخص‌سازی عملگرهای مدولی نرمال در C^*-مدول هیلبرت ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

مفهوم وارون‌های تعمیم یافته اولین‌بار توسط فردهلم [۱] در سال ۱۹۰۳که او آن را شبه وارون می‌نامید، برای یک عملگر انتگرالی به کار برده شد. رده همه شبه وارون‌ها در سال ۱۹۱۲ توسط هورویتز [۲] مشخصه‌سازی گردید. او از این که بعد فضای پوچی عملگرهای فردهلم متناهی است، برای نمایش ساختارهای جبری استفاده می‌کرد. در سال ۱۹۰۴ از مفهوم وارون‌های تعمیم یافته عملگرهای مشتق به عنوان توابع گرین عمومی در مباحث فضای هیلبرت استفاده می‌شد که به فراوانی در کارهای ریاضیدانانی چون میلر [۳] (۱۹۰۶)، وستفال [۴] (۱۹۰۹)، ایلیوت [۵] (۱۹۲۸) و رید [۶] (۱۹۳۱) دیده می‌شود. وارون‌های تعمیم یافته عملگرهای انتگرالی و مشتق (در صورت وجود) قبل از وارون‌های تعمیم یافته ماتریس ها معرفی شده‌اند. اولین بار مور [۷] یک وارون یکتا برای ماتریس‌هایی که بعد متناهی دارند، معرفی کرد. او آن را وارون تعمیم یافته می‌نامید. حدود ۳۰ سال بعد نتایج مور مورد توجه جدی قرار گرفت. در طول این زمان وارون‌های تعمیم یافته برای ماتریس‌ها توسط سیگل [۸] در سال ۱۹۳۷ و برای عملگرها توسط تسنگ [۹] و مورای [۱۰] در سال ۱۹۳۶ و توسط آتکینسون [۱۱] در سال ۱۹۵۳مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یکی از مباحث جالب در معادلات عملگری، تعمیم روش حل یک معادله از فضای ماتریسی به فضاهای با بعد نامتناهی است. در مطالعات اخیر نیز روش حل معادلات به فضای هیلبرت یا C^*-مدول هیلبرت تعمیم داده شده‌اند. از مدت‌ها پیش وارون‌های تعمیم یافته وارد بحث حل معادلات ماتریسی شده‌اند و در ادامه نیز همان نقش را در فضاهای هیلبرت و C^*-مدول هیلبرت بر عهده گرفته‌اند. شرط داشتن

---

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: ajanfada@birjand.ac.ir (علیرضا جانفدا)، j.farrokhi@birjandut.ac.ir (جواد فرخی استاد).
http://doi.org/10.22072/wala.2021.129902.1292

[1] Fredholm
[2] Hurwitz
[3] Myller
[4] Westfal
[5] Elliott
[6] Reid
[7] Moore
[8] Siegel
[9] Tseng
[10] Murray
[11] Atkinson

وارون تعمیم یافته، بسته بودن برد عملگر است که در ماتریس‌ها این شرط همواره برقرار است، پس استفاده از این وارون در بحث ماتریس‌ها امری کاملا طبیعی به نظر می رسد اما در مورد فضاهای بالاتر لزوما برقرار نیست. موقع استفاده از این وارون باید ابتدا از بسته بودن برد عملگر اطمینان حاصل کرد. C^* -مدول‌های هیلبرت توسیعی از فضاهای هیلبرت هستند که اتفاقاً خواص مشابهی دارند، هرچند در مواردی تفاوت‌هایی نیز با آن‌ها دارند. در واقع یک C^*-مدول هیلبرت مشابه فضای هیلبرت مجهز به یک ضرب داخلی است با این تفاوت که در اینجا ضرب داخلی مقادیر خود را به جای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ از C^*-جبر انتخاب می‌کند. C^*-مدول‌های هیلبرت ابزار مفیدی در نظریه‌ی عملگرها هستند که رده‌ی با اهمیتی از عملگرها روی آن‌ها تعریف می‌شوند. البته در اینجا برخی از خواص مشهور فضای هیلبرت از جمله اتحاد فیثاغورث، خود دوگانی و حتی تجزیه‌ی زیرفضاهای مکمل متعامد را از دست می‌دهیم. در دهه‌های اخیر کاربردهای جذابی از این فضاها ارائه شده است. برای جزئیات بیشتر به [۴]–[۷] و [۱۴] مراجعه کنید.

اخیراً ژورژویچ در [۳] ، محمدزاده کاریزکی و همکاران در [۱۳] ، مصلحیان و همکاران در [۱۷] ،زو و شنگ در [۲۰] و...اقدام به حل معادلات عملگری به کمک وارون مور-پنروز روی فضای C^*-مدول هیلبرت نموده‌اند، که کاربردهای فراوانی در نظریه کنترل، سیستم‌های دینامیکی و ... دارند. ساختار کلی این مقاله به شرح ذیل است:

بخش ۱ به مقدمه، برخی تعاریف پیش‌نیاز و قضایای مورد استفاده در بخش‌های بعدی اختصاص دارد. در بخش ۲ به برخی از روابط بین عملگرهای مدولی A، B، AB و وارون‌های مور-پنروز آن‌ها پرداخته‌ایم. در بخش ۳ یک مشخص‌سازی برای عملگرهای مدولی نرمال ارائه کرده‌ایم. در ادامه، تعاریف و نمادهای مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

یک $\mathcal{A}$-مدول مثل $\mathcal{X}$ روی C^*-جبر (نه لزوماً یکدار) $\mathcal{A}$ را یک $\mathcal{A}$-مدول پیش هیلبرت چپ گوئیم هرگاه یک ضرب داخلی $\mathcal{A}$-مقدار مثل $\langle .,. \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$ روی آن با خواص زیر تعریف شود.

الف) این نگاشت نسبت به مؤلفه‌ی اول خطی و نسبت به مؤلفه‌ی دوم مزدوج-خطی است.

ب) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*,\ \langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$.

ج) $\langle x, x\rangle \geq 0$ و تساوی فقط در صفر اتفاق می‌افتد.

$\mathcal{A}$-مدول پیش هیلبرت راست نیز مشابهاً تعریف می‌شود. $\mathcal{A}$-مدول پیش هیلبرت $\mathcal{X}$ را $\mathcal{A}$-مدول

هیلبرت می‌گوئیم هرگاه نسبت به نرم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ کامل باشد.

به‌عنوان مثال هر C^*-جبر مثل $\mathcal{A}$ با تعریف $\langle a, b\rangle = ab^*$ برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، یک $\mathcal{A}$-مدول هیلبرت می‌باشد. همچنین هر فضای هیلبرت و به‌ویژه $\mathbb{C}$، یک $\mathbb{C}$-مدول هیلبرت هستند.

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}$-مدول هیلبرت و $\mathcal{Y}$ یک زیرمدول از آن باشد، اگر قرار دهیم $\mathcal{Y}^\perp := \{y \in \mathcal{X} : \langle x, y\rangle = \circ \ \forall x \in \mathcal{Y}\}$ در این‌صورت $\mathcal{Y}$ را مکمل‌متعامد گوئیم هرگاه $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$. می‌دانیم در فضای هیلبرت هر زیرفضای بسته، مکمل‌متعامد است. لذا برد هر عملگر بردبسته نیز یک زیرفضای بسته و بنابراین مکمل‌متعامد است. علی‌رغم اینکه هر زیر مدول بسته از C^*-مدول هیلبرت لزوما مکمل‌متعامد نیست، اما می‌توان دید که برد یک عملگر بردبسته در C^*-مدول هیلبرت نیز مکمل‌متعامد است. برای اطلاعات بیشتر به [۹] مراجعه شود. در حقیقت شرط مکمل‌متعامد بودن برد یک عملگر ضعیف‌تر از شرط بسته بودن برد آن است. اگر $\mathcal{Y}$ یک زیر مدول (نه لزوماً بسته) از $\mathcal{X}$ باشد، $\mathcal{Y}^\perp$ یک زیر مدول بسته از $\mathcal{X}$ است و بعلاوه $\overline{\mathcal{Y}} \subseteq \mathcal{Y}^{\perp\perp}$.

لنس [12] در [۹] ثابت کرد که زیر مدول‌های مکمل‌متعامد خاصی که در لم ۲.۱ نیز به آن‌ها اشاره کرده‌ایم وابسته به یک عملگر مدولی همواره وجود دارند. برای مطالعه‌ی بیشتر به [۹، ۱۰، ۱۸، ۱۹] و مراجع موجود در آن‌ها مراجعه کنید.

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$، $\mathcal{A}$-مدول‌های هیلبرت باشند، مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهایی مثل $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ که عملگر الحاقی آن یعنی عملگر خطی $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ با تعریف $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$ موجود باشد را با $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ نمایش می‌دهیم. وقتی $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ، به‌جای نماد $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ از نماد $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ استفاده می‌کنیم. ثابت می‌شود که هر عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ باید کراندار و $\mathcal{A}$-خطی باشد یعنی: $A(ax) = a(Ax) \quad x \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{A}$.

در این مقاله $\mathcal{A}$ را یک C^*-جبر (نه لزوماً یکدار) و $\mathcal{X}$ را $\mathcal{A}$-مدول هیلبرت در نظر می‌گیریم. از نمادهای $\ker(\cdot)$ و $\operatorname{ran}(\cdot)$ به ترتیب برای هسته و برد یک عملگر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $A, X \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ و داشته باشیم

(۱) $AXA = A$؛

(۲) $XAX = X$؛

[12] Lance

(۳) $(XA)^* = XA$؛

(۴) $(AX)^* = AX$.

اگر شرط (۱) برقرار باشد، X را وارون درونی A و اگر شرط (۲) صادق باشد، X را وارون بیرونی A می‌گوییم. اگر α زیر مجموعه‌ای از $\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد، در این‌صورت عملگر X را α-وارون عملگر A نامیده و آن را با نماد $A\{\alpha\}$ نمایش می‌دهیم، هرگاه X در شرایط α از تعریف ۱.۱ صدق کند. به‌ویژه اگر هر چهار شرط برقرار باشند، آن‌گاه X را وارون مور-پنروز A نامیده و با $A^\dagger$ نشان می‌دهیم. در واقع $A^\dagger = A\{۱,۲,۳,۴\}$. وارون مور-پنروز دارای خواص زیر است.

مطالب زیر غالبا از [۱۸] اقتباس شده است، برای اطلاعات بیشتر به آن مراجعه شود.

$$A^*AA^\dagger = A^* = A^\dagger AA^*, \quad (A^*A)^\dagger = A^\dagger(A^*)^\dagger, \quad \mathrm{ran}(A^\dagger) = \mathrm{ran}(A^*) \tag{۱.۱}$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A, \quad (A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger, \quad \mathrm{ran}(A) = \mathrm{ran}(AA^\dagger), \quad \mathrm{ran}(A^\dagger) = \mathrm{ran}(A^\dagger A) \tag{۲.۱}$$

و

$$\ker(A^*) = \ker(A^\dagger) = \ker(AA^\dagger) \tag{۳.۱}$$

در سال ۱۹۵۵ پنروز [۱۳] نتایج به دست آمده را با سرعت بیشتری در سیستم‌های خطی به کار برد و تا کنون مقالات زیادی در مورد وارون مور-پنروز نوشته شده است. یکی از مهم‌ترین ابزارها برای پیدا کردن جواب معادلات ماتریسی یا عملگری، وارون‌های تعمیم‌یافته هستند. البته، همان‌طور که اشاره شد عملگرها همیشه دارای این وارون‌ها نیستند و با داشتن شرایطی این وارون‌ها برای آن‌ها تعریف می‌شود. از جمله یکی از این شرایط بسته بودن برد یک عملگر مدولی است. در لم زیر شرایط لازم و کافی برای بسته بودن برد یک عملگر بیان شده است.

[13] Penrose

لم ۲.۱. *[۹، قضیه ۳.۲] فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. در این‌صورت بسته بودن هر یک از مجموعه‌های زیر بسته بودن سایر مجموعه‌ها را ایجاب می‌کند.*

$$\mathrm{ran(A)} \quad ، \quad \mathrm{ran(A^*)} \quad ، \quad \mathrm{ran(AA^*)} \quad \text{و} \quad \mathrm{ran(A^*A)}.$$

اگر $\mathrm{ran(A)}$ بسته باشد، آن‌گاه $\mathrm{ran(A)} = \mathrm{ran(AA^*)}$، $\mathrm{ran(A^*)} = \mathrm{ran(A^*A)}$ و تجزیه‌های زیر برقرار هستند

$$\mathcal{X} = \ker(A) \oplus \mathrm{ran(A^*)} \quad \text{و} \quad \mathcal{Y} = \mathrm{ran(A)} \oplus \ker(\mathrm{A^*}).$$

برای هر عملگر مدولی $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ می‌توان یک نمایش ماتریسی به‌صورت زیر ارائه کرد. اگر $\mathcal{M},\mathcal{N}$ به‌ترتیب زیرفضاهای مکمل‌متعامد بسته‌ای از $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ باشند که $\mathcal{X} = \mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^\perp$ و $\mathcal{Y} = \mathcal{N}\oplus\mathcal{N}^\perp$ در این‌صورت A را به‌صورت یک ماتریس ۲×۲

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

نمایش می‌دهیم، که در آن $A_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{N})$، $A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^\perp,\mathcal{N})$، $A_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{N}^\perp)$ و $A_4 \in \mathcal{L}(\mathcal{M}^\perp,\mathcal{N}^\perp)$ ، در واقع $A_1 = P_\mathcal{N} A P_\mathcal{M}$، $A_2 = P_\mathcal{N} A(1 - P_\mathcal{M})$، $A_3 = (1 - P_\mathcal{N})AP_\mathcal{M}$ و $A_4 = (1 - P_\mathcal{N})A(1 - P_\mathcal{M})$. در قضیه‌ی بعد با توجه به نوع تجزیه‌ی $\mathcal{X}$ یا $\mathcal{Y}$ می‌توان نمایش ماتریسی A را دقیق‌تر مشخص نمود. اثبات همه‌ی این احکام در مراجع [۱۱، ۱۲، ۱۶] آمده است.

قضیه ۳.۱. *فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ برد بسته داشته باشد.*

(الف) اگر $\mathcal{X} = \mathrm{ran(A^*)} \oplus \ker(\mathrm{A})$ و $\mathcal{Y} = \mathrm{ran(A)} \oplus \ker(\mathrm{A^*})$ آن‌گاه

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A^*)} \\ \ker(A) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A)} \\ \ker(A^*) \end{bmatrix}$$

که در آن A_1 وارون‌پذیر است و به‌علاوه در این‌حالت

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} {A_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A)} \\ \ker(A^*) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A^*)} \\ \ker(A) \end{bmatrix}$$

ب) اگر $\mathcal{X}$ به دو زیر فضای دلخواه به‌صورت $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ تجزیه شود و $\mathcal{Y} = \mathrm{ran(A)} \oplus \ker(\mathrm{A}^*)$ آن‌گاه

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A)} \\ \ker(A^*) \end{bmatrix}$$

و در این‌حالت

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} {A_1}^* D^{-1} & 0 \\ {A_2}^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A)} \\ \ker(A^*) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{bmatrix}$$

که در آن $D = A_1 A_1^* + A_2 A_2^* \in \mathcal{L}(\mathrm{ran(A)})$ وارون‌پذیر است.

ج) اگر $\mathcal{Y}$ به دو زیر فضای $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ تجزیه شود و $\mathcal{X} = \mathrm{ran(A^*)} \oplus \ker(\mathrm{A})$ آن‌گاه

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A^*)} \\ \ker(A) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_2 \end{bmatrix}$$

و در این‌حالت

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} D^{-1}{A_1}^* & D^{-1}{A_2}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A^*)} \\ \ker(A) \end{bmatrix}$$

که در آن $D = A_1^* A_1 + A_2^* A_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{ran(A^*)})$ وارون‌پذیر است.

گزاره‌ی بعدی اثبات راحتی دارد و می‌توان برهان آن را در [۱۲] نیز ملاحظه نمود.

گزاره ۴.۱. *اگر عملگر مدولی $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ برد بسته داشته باشد، آن‌گاه $(AA^*)^\dagger = (A^*)^\dagger A^\dagger$.*

۲. عملگرهای با برد بسته روی فضای C^*-مدول هیلبرت

در هر جبر یکدار، برای دو عنصر وارون‌پذیر a, b داریم $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. به‌خصوص در C^*-جبر $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ نیز این رابطه برقرار است. اما این رابطه در خصوص وارون‌های تعمیم‌یافته و به‌ویژه وارون‌های مور-پنروز برقرار نیست. به‌عبارت دیگر اگر $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ عملگرهایی با برد بسته باشند، در حالت کلی ارتباطی بین $(AB)^\dagger$ با $A^\dagger$ و $B^\dagger$ وجود ندارد. چنانچه $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$، می‌گوئیم قانون مرتب معکوس برای وارون مور-پنروز اتفاق افتاده است. به‌علاوه اگر رابطه‌ی $C(AB)^\dagger D = CB^\dagger A^\dagger D$ برای عملگرهای مدولی دلخواه دیگر C و D برقرار باشد می‌گوئیم قانون مرتب معکوس آمیخته رخ داده است. در این بخش شرایطی را فراهم می‌کنیم که قانون مرتب معکوس برقرار شود.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید برد عملگرهای $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ بسته باشند و عملگر B خودالحاق باشد. در اینصورت اگر $AB = AA^*$ آن‌گاه احکام زیر برقرارند:*

الف) A خودالحاق است.

ب) قانون مرتب معکوس برای A و B برقرار است.

ج) $(ABA^*B^*)^\dagger = B^\dagger A^\dagger B^\dagger A^\dagger$.

اثبات. الف) با توجه به نمایش ماتریسی عملگرهای A و B، نمایش ماتریسی حاصل‌ضرب آن‌ها عبارت است از:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran}(A) \\ \ker(A^*) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran}(A^*) \\ \ker(A) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \mathrm{ran}(A) \\ \ker(A^*) \end{bmatrix},$$

در اینصورت $AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

از طرفی با توجه به فرض قضیه $AB = AA^*$. بنابراین

$$\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و در نتیجه

$$\begin{cases} A_1 B_1 = A_1 A_1^* \\ A_1 B_2 = 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه A_1 وارون‌پذیر است، $B_2 = 0$ و در نتیجه $B_3 = 0$ (بنا به خودالحاقی B) و بعلاوه $B_1 = A_1^*$. از اینرو A خودالحاق است و این برهان قسمت (الف) را تمام می‌کند.

ب) دوباره با توجه به نمایش ماتریسی

$$\begin{aligned} B^\dagger A^\dagger &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1^{*-1} & 0 \\ 0 & B_4^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1^{*-1} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (AA^*)^\dagger \\ &= (AB)^\dagger. \end{aligned}$$

ج) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) بدست می‌آید.

□

لم ۲.۲. *فرض کنید* $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$*. اگر* A *برد بسته داشته باشد و* $AB = BA$ *آنگاه* $A^\dagger B = BA^\dagger$.

اثبات. به قضیه ۱ − ۲ از مرجع [۱۱] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۲. *فرض کنید* $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ *عملگرهایی با برد بسته باشند و* $AB = C$*. اگر* A, B *و* C *عملگرهای خودالحاق باشند آنگاه* $B^\dagger A^\dagger \in AB\{1, 2, 3\}$.

اثبات. از آنجا که $AB = C$

$$\begin{bmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1{}^* & C_3{}^* \\ C_2{}^* & C_4{}^* \end{bmatrix},$$

بنابراین $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ و $A_1B_1 = C_1$.

اکنون کافیست شرایط (۳)-(۱) تعریف ۱.۱ را بررسی کنیم. با توجه به اینکه

$$B^\dagger A^\dagger = \begin{bmatrix} (A_1{}^{-1}C_1)^\dagger & 0 \\ 0 & B_4{}^\dagger \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1{}^{-1}C_1)^\dagger A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین $ABB^\dagger A^\dagger AB = AB$. یعنی شرط (۱) برقرار است. همچنین $B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ و لذا شرط (۲) نیز برقرار است. بعلاوه با توجه به لم قبل،

$$(ABB^\dagger A^\dagger)^* = A^{\dagger *}B^{\dagger *}B^*A^* = A^{\dagger *}B^{\dagger *}BA = ABB^\dagger A^\dagger$$

یعنی شرط (۳) نیز برقرار است. □

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ عملگرهایی با برد بسته باشند. اگر $BA = 0$ آن‌گاه $A^\dagger B^\dagger = 0$.*

اثبات. با توجه به اینکه $BA = 0$ نتیجه می‌شود که $A^*B^* = 0$. بنابراین

$$\mathrm{ran}(B^\dagger) = \mathrm{ran}(B^*) \subseteq \ker(A^*) = \ker(A^\dagger)$$

که نتیجه می‌دهد $A^\dagger B^\dagger = 0$. □

قضیه ۵.۲. *فرض کنید p و q عملگرهای تصویر باشند که برد یکی زیر مجموعه‌ی برد دیگری است و $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ عملگری با برد بسته باشد. اگر p و q با A جابه‌جا شوند آن‌گاه $(pAq)^\dagger = q^\dagger A^\dagger p^\dagger$.*

اثبات. با توجه به این‌که عملگرهای تصویر وارون مور-پنروز خود هستند، کافیست نشان دهیم $qA^\dagger p$

وارون مور–پنروز pAq است.

$$\text{۱)}\quad \begin{aligned} pAq(qA^{\dagger}p)pAq &= pAqA^{\dagger}pAq \\ &= pqAA^{\dagger}Apq \\ &= pqApq \\ &= pAq. \end{aligned}$$

$$\text{۲)}\quad \begin{aligned} qA^{\dagger}p(pAq)qA^{\dagger}p &= qA^{\dagger}pAqA^{\dagger}p \\ &= qpA^{\dagger}AA^{\dagger}qp \\ &= qA^{\dagger}p. \end{aligned}$$

$$\text{۳)}\quad \begin{aligned} ((pAq)(qA^{\dagger}p))^{*} &= (pAqA^{\dagger}p)^{*} \\ &= (pqAA^{\dagger}p)^{*} \\ &= pAA^{\dagger}pq \\ &= pAqA^{\dagger}p \\ &= (pAq)(qA^{\dagger}p). \end{aligned}$$

$$\text{۴)}\quad \begin{aligned} ((qA^{\dagger}p)(pAq))^{*} &= (qA^{\dagger}pAq)^{*} \\ &= (qpA^{\dagger}Aq)^{*} \\ &= qA^{\dagger}Aqp \\ &= qA^{\dagger}pAq \\ &= (qA^{\dagger}p)(pAq). \end{aligned}$$

□

نتیجه ۶.۲. *فرض کنید p، q و r تصاویری باشند که بردهای آن‌ها دو به دو زیر مجموعه‌ی هم هستند و $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ عملگرهایی با برد بسته باشند. اگر $Ap = pA$، $Aq = qA$ و $Br = rB$، آن‌گاه $(pAqBr)^\dagger = r^\dagger B^\dagger q^\dagger A^\dagger p^\dagger$.*

اثبات. مشابه قضیه قبل کافیست شرایط مور-پنروزی را برای عملگر $pAqBr$ بررسی کنیم. □

۳. مشخص‌سازی عملگرهای مدولی نرمال

در این بخش ضمن مرور مفاهیم عملگرهای نرمال و EP در C^*-مدول هیلبرت، شرایط معادلی برای نرمال بودن یک عملگر مدولی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک C^*-مدول هیلبرت باشد. عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ را

الف) نرمال گوئیم هرگاه $A^*A = AA^*$.

ب) EP گوئیم هرگاه $\mathrm{ran}(A^*) = \mathrm{ran}(A)$.

در فضای C^*-مدول هیلبرت، برای حصول یک نظریه مطلوب در خصوص عملگرهای EP، لازم است که شرط بسته بودن برد را هم اضافه کنیم. به راحتی می‌توان دید که، مشابه فضای هیلبرت در اینجا نیز شرایط زیر معادلند:

الف) عملگر A برد بسته دارد.

ب) A و A^* هسته‌های یکسان دارند.

ج) برد A مکمل‌متعامدی مثل $\ker(A)$ دارد.

گزاره ۲.۳. *فرض کنید عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ برد بسته داشته باشد، در این‌صورت $AA^* = A^\dagger A$ اگر و تنها اگر برای هر عملگر $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ داشته باشیم: $\|A^\dagger ABA^\dagger\| = \|A^*BA^\dagger\|$.*

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنید $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ عملگری دلخواه روی $\mathcal{X}$ باشد، در این‌صورت

$$\begin{aligned}\|A^*BA^\dagger\|^۲ &= \|\langle A^*BA^\dagger, A^*BA^\dagger\rangle\| \\ &= \|\langle BA^\dagger, AA^*BA^\dagger\rangle\| \\ &= \|\langle BA^\dagger, A^\dagger ABA^\dagger\rangle\| \\ &= \|\langle A^\dagger ABA^\dagger, A^\dagger ABA^\dagger\rangle\| \\ &= \|A^\dagger ABA^\dagger\|^۲.\end{aligned}$$

بررسی سمت دیگر این گزاره به سادگی صورت می‌گیرد. □

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ برد بسته داشته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) A یک عملگر نرمال است.

ب) عملگر A با عملگر $A^\dagger + A^*$ جابه‌جا می‌شود.

ج) $A^\dagger$ با عملگر $A + A^*$ جابه‌جا می‌شود.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): با توجه به قضیه‌ی ۳.۱، فرض کنید A دارای نمایش ماتریسی به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{ran}(A^*) \\ \ker(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{ran}(A) \\ \ker(A^*) \end{bmatrix},$$

که در آن A_1 وارون پذیر است. چون A نرمال است، پس $A_1{}^*A_1 = A_1A_1{}^*$. بنابراین

$$\begin{aligned}
A(A^* + A^\dagger) &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1{}^* + A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1(A_1{}^* + A_1{}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1A_1{}^* + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1{}^*A_1 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1{}^*A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1{}^{-1}A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_1{}^* + A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (A^* + A^\dagger)A.
\end{aligned}$$

(ب) $\leftarrow$ (ج): مشابه قسمت قبل، با استفاده از تکنیک ماتریس‌های بلوکی به راحتی نتیجه می‌شود.
(ج) $\leftarrow$ (الف): چون $A^\dagger(A + A^*) = (A + A^*)A^\dagger$ به روشنی A نرمال است. $\square$

نتیجه زیر فوراً از قضیه‌ی قبل به‌دست می‌آید.

نتیجه ۴.۳. *فرض‌کنید $\mathcal{X}$ یک فضای C^*-مدول هیلبرت باشد در این‌صورت عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ نرمال با برد بسته است اگر و تنها اگر A با $(AA^*A)^\dagger$ جابه‌جا شود.*

قضیه ۵.۳. *فرض‌کنید عملگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ برد بسته داشته باشد. در اینصورت احکام زیر معادلند:*

الف) A نرمال است.

ب) A^*A وارون داخلی $AA^\dagger$ است.

ج) AA^* *وارون بیرونی* $A^\dagger A$ *است.*

اثبات. (الف) ← (ب): چون A نرمال است پس $A^*A = AA^*$ لذا $AA^\dagger(A^*A)AA^\dagger = AA^*AA^\dagger$. با توجه به نمایش ماتریسی عملگرها

$$\begin{aligned} AA^\dagger(A^*A)AA^\dagger = AA^*AA^\dagger &= \begin{bmatrix} A_1A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1{A_1}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1{A_1}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= A^*A. \end{aligned}$$

بنابراین $AA^\dagger(A^*A)AA^\dagger = A^*A$، که نتیجه می‌دهد $A^*A \in AA^\dagger\{1\}$.

(ب) ← (الف): بنا به قضیه‌ی ۳.۱، $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{ran(A)} \\ \mathrm{ker(A^*)} \end{bmatrix}$

در این‌صورت $A^* = \begin{bmatrix} {A_1}^* & 0 \\ {A_2}^* & 0 \end{bmatrix}$. بنابراین

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {A_1}^* & 0 \\ {A_2}^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1{A_1}^* + A_2{A_2}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به نمایش ماتریسی $A^\dagger = \begin{bmatrix} {A_1}^*D^{-1} & 0 \\ A_2D^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ که در آن $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ در این

صورت

$$A^*A = AA^\dagger A^* A A A^\dagger = \begin{bmatrix} A_۱A_۱^* + A_۲A_۲^* & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = AA^*.$$

(الف) $\leftarrow$ (ج): چون A نرمال است، لذا $A^*A = AA^*$، در این صورت

$$A^\dagger A(AA^*)A^\dagger A = A^\dagger AA^*AA^\dagger A = A^\dagger AA^*A = A^\dagger AAA^*.$$

از طرفی با توجه به نمایش ماتریسی

$$\begin{aligned}(A^\dagger A)(AA^*) &= \begin{bmatrix} A_۱^{-۱}A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_۱A_۱^* & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_۱A_۱^* & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_۱A_۱^* & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= A^*A.\end{aligned}$$

(ج) $\leftarrow$ (الف): مشابه قسمت (ب) $\leftarrow$ (الف) و به کمک نمایش ماتریسی A و $A^\dagger$ انجام می‌شود. $\square$

عملگر $U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ را ایزومتری جزئی گوییم، هرگاه روی $\ker(U)^\perp$ طول‌پا باشد. می‌توان دید که برای هر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ یک ایزومتری جزئی مثل U وجود دارد که $A = U|A|$. به این تجزیه، تجزیه‌ی قطبی می‌گوییم. برای اطلاعات بیشتر در این باره به [۱۵] مراجعه کنید.

لم ۶.۳. *[۱۱، قضیه ۳. ۵] اگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ یک عملگر بردبسته با تجزیه‌ی قطبی به‌صورت $A = U|A|$ باشد، آن‌گاه $A^\dagger = |A|^\dagger U^*$.*

قضیه ۷.۳. *اگر $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ یک عملگر EP با برد بسته باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:*

الف) A نرمال است.

ب) *برای هر عملگر* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$، $\|A^\dagger BA^*\| + \|A^*BA^\dagger\| = \|A^\dagger AB\| + \|ABA^\dagger\|$.

ج) *برای هر عملگر* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$، $\|A^\dagger AB\| + \|ABA^\dagger\| \geq ۲\|AA^\dagger BA^\dagger A\|$.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): فرض کنید $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$، یک عملگر دلخواه باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\|AB\|^۲ &= \|\langle AB, AB\rangle\| \\ &= \|\langle A^*AB, B\rangle\| \\ &= \|\langle AA^*B, B\rangle\| \\ &= \|\langle A^*B, A^*B\rangle\| \\ &= \|A^*B\|^۲,\end{aligned}$$

بنابراین $\|A^*B\| = \|AB\|$. به طور مشابه می‌توان دید که $\|BA^*\| = \|BA\|$. بنابراین

$$\begin{aligned}\|ABA^\dagger\| &= \|A(BA^\dagger)\| \\ &= \|A^*(BA^\dagger)\| \\ &= \|A^*BA^\dagger\|,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\|A^\dagger BA\| &= \|(A^\dagger B)A\| \\ &= \|(A^\dagger B)A^*\| \\ &= \|A^\dagger BA^*\|,\end{aligned}$$

که این حکم (ب) را نتیجه می‌دهد.

(ب) $\leftarrow$ (ج): به کمک لم قبل و نامساوی مثلث داریم

$$\|ABA^{\dagger}\| + \|A^{\dagger}AB\| = \|A^{*}BA^{\dagger}\| + \|A^{\dagger}BA^{*}\| \geq \|A^{*}BA^{\dagger} + A^{\dagger}BA^{*}\| \geq ۲\|AA^{\dagger}BA^{\dagger}A\|.$$

(ج) ← (الف): با توجه به نمایش ماتریسی داریم:

$$\begin{aligned} ABA^{\dagger} &= \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_۱ & B_۲ \\ B_۳ & B_۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_۱{}^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_۱A_۱{}^{-۱} & ۰ \\ B_۳A_۱{}^{-۱} & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_۱B_۱A_۱{}^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $B_۱ = A_۱B_۱A_۱{}^{-۱}$ و درنتیجه $A_۱B_۱ = B_۱A_۱$. از طرفی

$$\begin{aligned} A^{\dagger}BA &= \begin{bmatrix} A_۱{}^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_۱ & B_۲ \\ B_۳ & B_۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_۱{}^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_۱A_۱ & ۰ \\ B_۳A_۱ & ۰ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_۱{}^{-۱}B_۱A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

می‌توان دید که $A_1{}^{-1}B_1A_1 = B_1$ و در نتیجه $A_1B_1 = B_1A_1$. به‌علاوه

$$
\begin{aligned}
AA^\dagger BA^\dagger A &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

بنابراین $\|A_1B_1A_1{}^{-1}\| = \|ABA^{-1}\|$، $\|A^\dagger BA\| = \|A_1{}^{-1}B_1A_1\|$ و $\|AA^\dagger BA^\dagger A\| = \|B_1\|$. اکنون بنا به (ج) می توان نتیجه گرفت که $\|A_1B_1A_1{}^{-1}\| + \|A_1{}^{-1}B_1A_1\| \geq 2\|B_1\|$ از این‌رو مشابه برهان گزاره‌ی ۵ از مرجع [۱] ، A_1 نرمال است. یعنی $A_1^*A_1 = A_1A_1^*$ و در نتیجه A نرمال است. □

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داور(ان) محترم به‌خاطر زمانی که صرف مطالعه‌ی دقیق مقاله نموده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

[1] A. Seddik, On the injective norm and characterization of some subclasses of normal operators by inequalities or equalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **351** (2009), 277–284.

[2] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications (2nd edition)*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] D.S. Djordjevič, Explicit solution of the operator equation $A^*X + X^*A = B$, *J. Comput. Appl. Math.*, **200** (2007), 701–704.

[4] D.S. Djordjevič and N.C. Dinič, Reverse order law for the Moore-Penrose inverse, *J. Math. Anal. Appl.*, **361** (2010), 252–261.

[5] J. Farokhi-ostad and M. Mohammadzadeh Karizaki, The reverse order law for EP modular operators, *J. Math. Computer Sci.*, **16** (2016), 412–418.

[6] J. Farokhi-ostad and A.R. Janfada, Products of EP operators on Hilbert C^*-Modules, *Sahand Commun. Math. Anal.*, **10**(1) (2018), 61–71.

[7] J. Farokhi-ostad and A.R. Janfada, On closed range C^*-modular operators, *Aust. J. Math. Anal. Appl. (AJMAA)*, **15**(2) (2018), 1–9.

[8] M. Jalaeian, M. Mohammadzadeh Karizaki and M. Hassani, Conditions that the product of operators is an EP operators in Hilbert C^*-modules, *Linear Algebra Appl.*, **68**(10) (2020), 1990–2004.

[9] E.C. Lance, *Hilbert C^*-Modules*, LMS Lecture Note Series 210, Cambridge Univ. Press, 1995.

[10] V.M. Manuilov and E.V. Troitsky, *Hilbert C^*-Modules*, Amer. Math. Soc, Providence, R. I., 2005.

[11] M. Mohammadzadeh Karizaki and D.S. Djordjevič, Commuting C^*-modular operators, *Aequationes Math.*, **90**(6) (2016), 1103–1114.

[12] M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani and M. Amyari, Moore-Penrose inverse of product operators in Hilbert C^*-modules, *Filomat*, **30**(13) (2016), 3397–3402.

[13] M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani and D.S. Djordjevič, The solutions to operator equation $TXS - SX^*T^* = A$ in Hilbert C^*-modules, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, **7**(2) (2016), 127–132.

[14] M. Mohammadzadeh Karizaki, M. Hassani, M. Amyari and M. Khosravi, Operator matrix of Moore-Penrose inverse operators on Hilbert C^*-modules, *Colloq. Math.*, **140** (2015), 171–182.

[15] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, London, 1990.

[16] K. Sharifi, The product of operators with closed range in Hilbert C^*-modules, *Linear Algebra Appl.*, **435** (2011), 1122–1130.

[17] M. Vosough and M.S. Moslehian, Solutions of the system of operator equations $BXA = B = AXB$ via the $*$-order, *Electron. J. Linear Algebra*, **32** (2017), 172–183.

[18] M. Vosough and M.S. Moslehian, *Operator and Matrix Equations*, Ph.d thesis, Ferdowsi University of Mashhad, 2017.

[19] Q. Xu and L. Sheng, Positive semi-definite matrices of adjointable operators on Hilbert C^*-modules, *Linear Algebra Appl.*, **428** (2008), 992–1000.

[20] Q. Xu and L. Sheng, The solutions to some operator equations, *Linear Algebra Appl.*, **429**

(2008), 1997–2024.