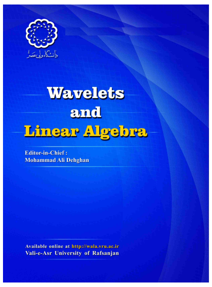
موجک‌ها و جبرخطی ۸(۳) (۱۴۰۱) ۶۱-۶۹



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

مدل نرمی برای مدار یکانی ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر

اسماعیل نیکوفر*[آ]

[آ]دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵ تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۴ تیر ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۲۵ مهر ۱۴۰۰
دسترسی آنلاین: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۱

ادیتور رابط: حمیدرضا افشین

کلمات کلیدی:
C^*-جبر، مدار یکانی،
ماتریس تحویل‌ناپذیر.

چکیده

در این مقاله، یک مدل نرمی برای مدار یکانی ماتریس تحویل‌ناپذیر x بر حسب نرم چندجمله‌ای‌های خطی و ماتریس مقدار به‌دست می‌آوریم. همچنین ثابت می‌کنیم مدار یکانی ماتریس تحویل ناپذیر x، مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های z است که نرم چندجمله‌ای ماتریس مقدار و از درجه‌ی یک بر حسب ماتریس x با نرم چندجمله‌ای ماتریس مقدار و از درجه‌ی یک بر حسب ماتریس z برابر باشد.

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: nikoufar@pnu.ac.ir (اسماعیل نیکوفر).

http://doi.org/10.22072/wala.2021.129824.1290

۱. نمایش‌های کراندار

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر باشد و $S \subseteq \mathcal{A}$ به‌طوری‌که $\mathcal{A} = C^*(S)$. C^*-جبر تولید شده توسط S که با $C^*(S)$ نشان می‌دهیم شامل همه عملگرهایی است که حد چندجمله‌ای‌هایی از S و S^* هستند. یکی از دلایل اهمیت عملگرهای نرمال این است که اگر S نرمال باشد، آن‌گاه $C^*(S)$ جابجایی است. مجموعه‌ی عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و مجموعه‌ی عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را با $\mathcal{B}_۰(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم. نماد $M_n(\mathbb{C})$ یا به طور خلاصه M_n را برای ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط به‌کار می‌بریم. ماتریس x را هم‌ارز یکانی ماتریس z گوییم هرگاه ماتریس یکانی u موجود باشد به‌طوری‌که $x = u^*zu$. مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های هم‌ارز یکانی با x را مدار یکانی x می‌نامیم و در این مقاله آن را با $O(x)$ نشان خواهیم داد.

عملگر خطی $\phi : M_n \to M_n$ را کاملاً مثبت گوییم هرگاه عملگر

$$\phi_n = \phi \otimes ۱ : M_n \otimes M_n \to M_n \otimes M_n$$

مثبت باشد و آن را کاملاً طول‌پا گوییم هرگاه ϕ_n طول‌پا باشد. منظور از $M_n \otimes M_n$ مجموعه ماتریس‌های بلوکی $n \times n$ است که درایه‌های آن‌ها شامل ماتریس‌های $n \times n$ باشد. یک نمایش $(\pi, \mathcal{H})$ از C^*-جبر $\mathcal{A}$، $*$-هم‌ریختی $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ است. این نمایش تحویل‌ناپذیر است هرگاه تنها زیرفضاهای بسته و پایای $\mathcal{H}$ تحت همه عملگرهای $\pi(\mathcal{A})$ زیرفضاهای بدیهی $\{۰\}$ و $\mathcal{H}$ باشند. نمایش تحویل‌ناپذیر π برای $\mathcal{A}$، نمایش کراندار برای S نامیده می‌شود هرگاه $\pi_{|_S}$ دارای یک توسیع خطی کاملاً مثبت یکتا به $\mathcal{A}$ باشد. زیر مجموعه‌ی S به اندازه کافی دارای نمایش‌های کراندار است هرگاه اشتراک هسته‌ی تمام نمایش‌های کراندار برای S، ایده‌آل بدیهی صفر در $\mathcal{A}$ باشد. به عبارت دیگر، برای هر $۰ \neq x \in S$، نمایش کراندار π_x برای S وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\pi_x(x) \neq ۰$.

فرض کنیم $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت n را مرتبه‌ی عملگر x گوییم و با $n(x)$ نشان خواهیم داد در صورتی که مجموعه‌ی $S = \{۱, x, x^۲, \cdots, x^n\}$ به اندازه کافی دارای نمایش‌های کراندار باشد. فرض کنیم $c_۰$، $c_۱$، $\cdots$ و c_k دنباله‌ای متناهی از ماتریس‌های مختلط $n \times n$ با $c_k \neq ۰$ باشند. در این صورت $p(z) = \sum_{i=۰}^{k} c_i z^i$ یک چندجمله‌ای M_n-مقدار از درجه‌ی k تعریف می‌کند. اگر x عملگری

روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $p(x)$ عملگری روی فضای هیلبرت $\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ است که به صورت

$$p(x) = \sum_{i=\circ}^{k} c_i \otimes x^i$$

تعریف می‌شود. به روش بدیهی ماتریس‌های $n \times n$ را با عملگرها روی $\mathbb{C}^n$ یکسان می‌گیریم [۴]. در C^*-جبر یک‌دار $\mathcal{A}$، برد حوزه‌ی ماتریسی nام عملگر a برابر است با،

$$W^n(a) := \{\phi(a) |\ \phi : C^*(a) \longrightarrow M_n \text{ ،نگاشت خطی کاملاً مثبت یکانی است } \phi\}.$$

دنباله‌ی $\{W^{1}(a), W^{2}(a), \cdots\}$ برد حوزه‌ی ماتریسی a نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱. عملگر $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را که خودالحاق و خودتوان باشد، تصویر می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. عملگر $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه a با هیچ تصویر نابدیهی جابه‌جا نشود و یا به طور معادل، هیچ زیرفضای خطی و بسته‌ی نابدیهی، پایا تحت a نباشد. مجموعه $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه تمام اعضای S تحویل‌ناپذیر باشند.

قضیه ۳.۱. *فرض کنیم x و z عملگرهای تحویل‌ناپذیر روی فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ باشند به‌طوری‌که $C^*(x)$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ و $n(x)$ و $n(z)$ تعریف شده و برابرند. اگر برای هر چندجمله‌ای ماتریس مقدار p که $\deg(p) \leq n(x)$ داشته باشیم $\|p(x)\| = \|p(z)\|$، آن‌گاه x و z هم ارز یکانی‌اند.*

اثبات. [۱]، قضیه ۲.۳.۲. □

تعریف ۴.۱. [۶] C^*-جبر $\mathcal{A}$ را جبر CCR گوییم هرگاه هر نمایش تحویل ناپذیر $\mathcal{A}$، C^*-جبر $\mathcal{A}$ را بتوی عملگرهای کاملاً پیوسته بنگارد. C^*-جبر $\mathcal{A}$ را جبر NGCR گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ دارای هیچ ایده آل ناصفری نباشد.

قضیه ۵.۱. *فرض کنیم x و z عملگرهای تحویل‌ناپذیر از مرتبه‌ی یک باشند به طوری‌که $C^*(x)$ و $C^*(z)$ جبر NGCR نباشند؛ یعنی، هر دو شامل عملگرهای فشرده‌ی ناصفر باشند. در این صورت x و z هم ارز یکانی‌اند اگر و تنها اگر حوزه‌ی ماتریسی یکسان داشته باشند.*

اثبات. [۱]، قضیه ۲.۴.۳. □

قضیه ۶.۱. *(قضیه‌ی کرانداری آروسون) فرض کنیم S یک مجموعه تحویل‌ناپذیر از عملگرها روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد به طوری که $1 \in S$ و $C^*(S)$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ باشد. در این صورت نمایش همانی $C^*(S)$ نمایش کراندار برای S است اگر و تنها اگر نگاشت خارج قسمت $q : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})}$ روی زیر فضای خطی تولید شده توسط $S \cup S^*$ کاملاً طولپا نباشد.*

اثبات. [۱]، قضیه ۲.۱.۱. □

۲. مدل نرمی مدار یکانی ماتریس تحویل‌ناپذیر

در این بخش یک مدل نرمی برای مدار یکانی ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر بر حسب نرم چندجمله‌ای‌های خطی و ماتریس مقدار به‌دست می‌آوریم. ابتدا برخی تعاریف مقدماتی برای ورود به این بحث را ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. عملگر a روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با رتبه متناهی است هرگاه برد a دارای بعد متناهی باشد. مجموعه‌ی عملگرهای با رتبه متناهی از $\mathcal{H}$ به‌توی $\mathcal{K}$ را با نماد $\mathcal{B}_{\circ\circ}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ و اگر $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ با نماد $\mathcal{B}_{\circ\circ}(\mathcal{H})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۲. *اگر $\mathcal{B}$ یک C^*-زیر جبر تحویل‌ناپذیر از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد که شامل یک عملگر فشرده‌ی ناصفر است، آن‌گاه $\mathcal{B}$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ است.*

اثبات. [۲]، قضیه‌ی ۱.۴.۲. □

قضیه ۳.۲. *فرض کنیم $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ عملگر فشرده، تحویل‌ناپذیر و ناصفر باشد. در این صورت*
(۱) $C^*(x)$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ است.
(۲) x از مرتبه‌ی یک است.

اثبات. (۱) چون x عملگر تحویل‌ناپذیر است لذا $C^*(x)$، یک C^*-جبر تحویل‌ناپذیر از عملگرهاست و چون x فشرده است بنا به قضیه‌ی ۲.۲، $C^*(x)$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ است.
(۲) $\frac{1}{2}x$ عملگر فشرده است و $\|x - \frac{1}{2}x\| < \|x\|$؛ یعنی، نگاشت خارج قسمت

$$q : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})}$$

روی زیر فضای خطی تولید شده توسط $\{۱, x, x^*\}$ کاملاً طول‌پا نیست. همچنین بنا به قسمت (۱)، $C^*(x)$ شامل $\mathcal{B}_\circ(\mathcal{H})$ است و مجموعه‌ی تحویل‌ناپذیری از عملگرهاست که شامل عملگر همانی است. پس بنا به قضیه‌ی کرانداری آروسون، نمایش همانی یک نمایش کراندار برای مجموعه‌ی $\{۱, x\}$ است. در نتیجه مرتبه‌ی عملگر x، برابر یک خواهد بود. □

قضیه ۴.۲. *اگر $x \in M_n$ تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه x از مرتبه‌ی یک است و C^*-جبر تولید شده توسط x با M_n برابر است.*

اثبات. ماتریس x به عنوان عملگر خطی کراندار روی $\mathbb{C}^n$ فشرده است و چون تحویل‌ناپذیر است بنا به قسمت (۲) از قضیه‌ی ۳.۲، x از مرتبه‌ی یک است. اکنون بنا به قسمت (۱) از قضیه‌ی ۳.۲، داریم،

$$M_n(\mathbb{C}) \supseteq C^*(x) \supseteq \mathcal{B}_\circ(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C}).$$

□

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم x و z عناصری از C^*-جبرهای یک‌دار $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشند. اگر n عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه برای هر $b, m \in M_n$ داریم:*

$$W^n(x) = W^n(z) \Longleftrightarrow W^۱(۱ \otimes m + x \otimes b) = W^۱(۱ \otimes m + z \otimes b).$$

اثبات. [۵]، قضیه‌ی ۴.۳. □

تعریف ۶.۲. زیر مجموعه K از C^*-جبر یک‌دار $\mathcal{A}$ را C^*-محدب گوییم هرگاه مجموعه K تحت هر مجموع متناهی به شکل $\sum t_i^* x_i t_i$ که $x_i \in K$، $t_i \in \mathcal{A}$ و $\sum t_i^* t_i = ۱$ بسته باشد.

به عنوان مثال، برد حوزه ماتریسی nام عملگر a یک مجموعه C^*-محدب است. پوش C^*-محدب مجموعه K کوچکترین مجموعه C^*-محدب شامل K است [۳] و با $C^* - convK$ نشان داده می‌شود. همچنین اگر $x \in K$، آن‌گاه

$$C^* - conv\{x\} = \left\{ \sum t_i^* x t_i : \sum t_i^* t_i = ۱, t_i \in A \right\}.$$

قضیه ۷.۲. *برای $x, z \in M_n$ جملات زیر معادلند:*

(۱) $C^* - conv\{x\} \subseteq C^* - conv\{z\}$.

(۲) برای $b, m \in M_n$، $W^1(1 \otimes m + x \otimes b) \subseteq W^1(1 \otimes m + z \otimes b)$.

(۳) برای $b, m \in M_n$، $\|1 \otimes m + x \otimes b\| \leq \|1 \otimes m + z \otimes b\|$.

اثبات. [۳]، قضیه‌ی ۲.۲. □

بنا به قضیه‌ی ۳.۱، اگر $x, z \in M_n$ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیری باشند، شرط کافی برای هم ارز یکانی بودن آن‌ها این است که برای هر چندجمله‌ای ماتریس مقدار p از درجه‌ی یک داشته باشیم، $\|p(x)\| = \|p(z)\|$. در قضیه‌ی زیر، تحویل‌ناپذیری z از فرض حذف شده است.

قضیه ۸.۲. *فرض کنیم $x \in M_n$ تحویل‌ناپذیر باشد. اگر $z \in M_n$ برای هر $b, m \in M_n$ در تساوی*

$$\|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|1 \otimes m + z \otimes b\|$$

صدق کند، آن‌گاه z تحویل‌ناپذیر است و به علاوه هم‌ارز یکانی با x است.

اثبات. [۳]، قضیه‌ی ۱.۲. □

حال نتیجه‌ی اصلی را بیان می‌کنیم و مدار یکانی یک ماتریس تحویل‌ناپذیر را در میان تمام ماتریس‌های $n \times n$، بر حسب نرم چندجمله‌ای‌های خطی و ماتریس مقدار در جبر $M_n \otimes M_n$ مشخص می‌نماییم.

قضیه ۹.۲. *فرض کنیم $x \in M_n$ یک ماتریس تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت*

$$O(x) = \left\{z \in M_n : \ \|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|1 \otimes m + z \otimes b\|, \ m, b \in M_n\right\}.$$

اثبات. فرض کنیم $z \in M_n$ برای هر $b, m \in M_n$ در تساوی

$$\|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|1 \otimes m + z \otimes b\|$$

صدق کند. در این صورت بنا به قضیه‌ی ۸.۲، $z \in O(x)$، یعنی ماتریس z هم ارز یکانی با x خواهد بود. برای شمول عکس فرض کنیم $z \in O(x)$. حال چون x یک ماتریس تحویل‌ناپذیر است در نتیجه

ماتریس z نیز تحویل‌ناپذیر خواهد بود. چون ماتریس‌های x و z تحویل‌ناپذیرند در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۴.۲، مرتبه‌ی هر دو یک است و C^*-جبر تولید شده توسط هر کدام برابر با M_n است. از طرفی چون x و z هم‌ارز یکانی هستند بنا به قضیه‌ی ۵.۱، حوزه‌ی ماتریسی هر دو برابر خواهد بود. در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۵.۲، برای هر $b, m \in M_n$ خواهیم داشت:

$$W^1(1 \otimes m + x \otimes b) = W^1(1 \otimes m + z \otimes b).$$

حال با استفاده از قضیه‌ی ۷.۲، نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود؛ یعنی،

$$\|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|1 \otimes m + z \otimes b\|.$$

□

در ادامه به اهمیت قضیه ۹.۲ می‌پردازیم.

نتیجه ۱۰.۲. *فرض کنیم $x, z \in M_n$ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر باشند. اگر $\|z\| \neq \|x\|$، آن‌گاه $z \notin O(x)$.*

اثبات. فرض کنیم m و b ماتریس‌هایی با بعد n باشند به طوری که m ماتریس صفر و b ماتریسی با درایه $(1, 1)$ برابر یک و بقیه درایه‌ها صفر باشد. در این صورت داریم،

$$\|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|x\|,$$
$$\|1 \otimes m + z \otimes b\| = \|z\|.$$

بنا به فرض چون $\|z\| \neq \|x\|$ در نتیجه $\|1 \otimes m + z \otimes b\| \neq \|1 \otimes m + x \otimes b\|$. بنابراین طبق قضیه ۹.۲ خواهیم داشت، $z \notin O(x)$. □

این نتیجه به ما این امکان را می‌دهد که تشخیص دهیم چگونه یک ماتریس تحویل ناپذیر در مدار یکانی ماتریس تحویل ناپذیر دیگر قرار ندارد.

مثال ۱۱.۲. ماتریس $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در مدار یکانی ماتریس $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ قرار ندارد، زیرا

$\|z\| = ۱$ در حالی که $\|x\| = ۲$. لازم به توضیح است که در این‌جا نرم یک این ماتریس‌ها مقایسه شده است که برابر است با ماکزیمم مجموع قدرمطلق درایه‌های ستون‌ها. سایر نرم‌ها که روی مجموعه ماتریس‌ها تعریف شده هم می‌تواند استفاده شود مانند نرم بی‌نهایت که برابر است با ماکزیمم مجموع قدرمطلق درایه‌های سطرها و یا نرم فروبنیوس که برابر است با ریشه دوم مجموع مربعات قدرمطلق تمام درایه‌ها. همین مثال اگر با تعریف مدار یکانی بررسی شود به یک دستگاه معادله غیر خطی خواهیم رسید که بررسی آن ساده نخواهد بود.

شایان ذکر است با افزایش ابعاد ماتریس‌ها بر تعداد معادلات غیر خطی افزوده می‌شود و لذا حل آن نیز پیچیده‌تر خواهد شد، در حالی که محاسبه نرم ماتریس‌ها ساده است.

می‌دانیم مدار یکانی یک عملگر طبق تعریف، زیر مجموعه پوش C^*-محدب آن عملگر است. در نتیجه زیر نشان می‌دهیم تساوی پوش C^*-محدب دو عملگر تحویل ناپذیر با تساوی مدار یکانی آن دو معادل است. بنابراین برای بررسی تساوی پوش C^*-محدب دو عملگر تحویل ناپذیر کافی است تساوی زیر مجموعه‌های کوچکتر مدار یکانی آن‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

نتیجه ۱۲.۲. *فرض کنیم $x, z \in M_n$ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر باشند. در این صورت جملات زیر معادل‌اند:*

(۱) $C^* - conv\{x\} = C^* - conv\{z\}$.

(۲) $O(x) = O(z)$.

اثبات. فرض کنیم (۱) برقرار باشد. در این صورت بنا به قضیه ۷.۲ و برای $m, b \in M_n$ داریم،

$$\|۱ \otimes m + x \otimes b\| = \|۱ \otimes m + z \otimes b\|. \qquad (۱.۲)$$

فرض کنیم $y \in O(x)$. در این صورت بنا به قضیه ۹.۲ داریم،

$$\|۱ \otimes m + x \otimes b\| = \|۱ \otimes m + y \otimes b\|. \qquad (۲.۲)$$

از (۱.۲) و (۲.۲) نتیجه می‌گیریم،

$$\|1 \otimes m + z \otimes b\| = \|1 \otimes m + y \otimes b\|. \qquad (۳.۲)$$

حال از (۳.۲) و بنا به قضیه ۹.۲ خواهیم داشت، $y \in \mathcal{O}(z)$. برعکس، اگر $y \in \mathcal{O}(z)$، به طریق مشابه داریم، $y \in \mathcal{O}(x)$ و بنابراین (۲) درست است.

فرض کنیم (۲) برقرار باشد. در این صورت چون $z \in \mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(x)$ پس بنا به قضیه ۹.۲ و برای $m, b \in M_n$ داریم،

$$\|1 \otimes m + x \otimes b\| = \|1 \otimes m + z \otimes b\|. \qquad (۴.۲)$$

در نتیجه با استفاده از قضیه ۷.۲ تساوی (۱) نیز حاصل می‌شود. □

مراجع

[1] W.B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras I, *Acta Math.*, **123** (1969), 141–224.

[2] W.B. Arveson, *An Invitation to C^*-algebra*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1976.

[3] D.R. Farenick and P.B. Morenz, C^*-extreme points of some compact C^*-convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993), 765–775.

[4] K. Hoffman, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[5] R.R. Smith and J.D. Ward, The geometric structure of generalized state space, *J. Funct. Anal.*, **40** (1981), 170–184.

[6] J. Sϕreng, Pure states of simple C^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **22** (1976), 390–404.