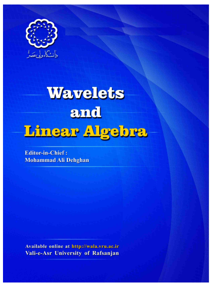
موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۸۵-۲۰۰



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج)
رفسنجان

برخی از نتایج روی معکوس درازین مجموع دو ماتریس با شرایط جدید و کاربردهای آن

منصور دانا*[آ]، رامش یوسفی[آ]، فاطمه کوثری[آ]

[آ]گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، استان کردستان، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۴ تیر ۱۳۹۹
پذیرفته شده: ۲۲ مهر ۱۳۹۹
دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: فرشید عبداللهی

کلمات کلیدی:

معکوس درازین، اندیس، ماتریس بلوکی، متمم شور تعمیم یافته.

چکیده

معکوسهای تعمیم یافته ی عملگرها و ماتریسها مبحث مهمی در جبر خطی می باشد از جمله معکوس درازین عملگرها و ماتریسها همچنین بدست آوردن معکوس درازین مجموع دو عملگر یا دو ماتریس که با استفاده از ماتریس های بلوکی و اعمال روی آنها فرمول هایی برای معکوس درازین مجموع ارائه می دهند. تا کنون ریاضیدان های بسیاری در این خصوص کار کرده و مقالات زیادی به چاپ رسانده اند از جمله Hartwig ، Martinez، Y.Wei و دیگر دانشمندان . در این مقاله فرمولی برای بدست آوردن معکوس درازین مجموع دو ماتریس با شرایط خاص را ارائه می‌دهیم و در ادامه با استفاده از فرمول‌های بدست آمده و نتایج آنها، معکوس درازین ماتریس‌های بلوکی را با شرایط خاص و متمم شور تعمیم یافته‌ی برابر با صفر بدست می‌آوریم.

۱. مقدمه

فرض A ماتریسی مربعی مختلط باشد، همان‌طور که در[۱] بیان شده، معکوس درازین ماتریس A را که با A^d نمایش داده می‌شود، ماتریس مربعی منحصر بفردی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$A^dA = AA^d \quad , \quad A^dAA^d = A^d \quad , \quad A^{k+1}A^d = A^k$$

که k عدد صحیح نامنفی می‌باشد و کوچکترین k ای که در شرایط بالا صدق کند را اندیس A گویند و با $ind(A) = k$ نمایش می‌دهند. همچنین $k = ind(A)$ کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$.

در حالتی که $ind(A) \leq 1$ باشد، معکوس درازین A را معکوس گروهی A گویند و با $A^\#$ نمایش می‌دهند. واضح است که $ind(A) = 0$ است اگر و تنها اگر A معکوس‌پذیر باشد و در این صورت $A^d = A^{-1}$ است. برای هر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ تصویر ویژه را با A^π نمایش داده که برابر است با $A^\pi = I - AA^d$ و متناظر مقدار ویژه صفر می‌باشد.

فرض $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشند. در سال ۱۹۵۸ درازین ([۱۱] را ببینید) مطالعه مسئله‌ی پیدا کردن فرمولی برای $(P+Q)^d$ را آغاز کرد و نشان داد که اگر $PQ = QP = 0$ باشد، آن‌گاه

$$(P+Q)^d = P^d + Q^d.$$

در حال حاضر بدست آوردن فرمولی برای درازین مجموع دو ماتریس بصورت مسئله‌ی باز می‌باشد، با این حال محققان بسیاری در این زمینه با شرایط خاصی روی P و Q مقالات متعددی به چاپ رسانده‌اند. مثلاً، Hartwig در [۱۳] نتایج Drazin را تعمیم داده و فرمولی برای $(P+Q)^d$ در حالتی که فقط

*نویسنده مسئول
آدرس ایمیلها: mdana@uok.ac.ir (منصور دانا)، ramesh.yousefi@yahoo.com (رامش یوسفی)، f.kusari2000@gmail.com (فاطمه کوثری).

http://doi.org/10.22072/wala.2020.129338.1291

$PQ = 0$ است را بدست آورده است.

در سال ۲۰۰۹، M.Serrano و C.Gonzalez در [۱۴] فرمولی برای $(P+Q)^d$ با شرایط $P^2Q = 0$ و $Q^2 = 0$ ارائه دادند. همچنین در سال ۲۰۱۱، Yang و Lin در [۱۶] نیز این مطلب را با شرایط $Q^2P = 0$ و $PQP = 0$ ارائه کردند. در سال ۲۰۱۲، Bu در [۲] فرمولی برای $(P+Q)^d$ زمانی که $P^2Q = 0$ و $Q^2P = 0$ است را بدست آورد. فرمول‌های دیگری را می‌توانید در [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲] ببینید.

از فرمول بدست آوردن $(P+Q)^d$ می‌توان برای بدست آوردن معکوس درازین ماتریس بلوکی ۲×۲ روی اعداد مختلط استفاده کرد. در حقیقت در سال ۱۹۷۹، Campbell و Meyer این مسئله را مطرح کردند که می‌توان از معکوس درازین مجموع می‌توان معکوس درازین ماتریس مختلط بلوکی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ را که A و D ماتریس‌های مربعی و نه لزوما همسایز را در شرایط خاص روی بلوک‌ها، بدست آورد. در حال حاضر مسئله بدست آوردن M^d هنوز بعنوان مسئله‌ای باز است و مقالاتی در این زمینه با شرایط خاص روی بلوکهای M به چاپ رسیده است. در اینجا برخی از این مقالات را با شرایط داده شده که با استفاده از اینکه متمم شور تعمیم یافته M؛ یعنی، ماتریس $S = D - CA^dB$ برابر با صفر است را بیان می‌کنیم:

۱) $CA^\pi = 0 \quad , \quad A^\pi B = 0 \quad , \quad S = 0$ [۱۵]

۲) $CA^\pi B = 0 \quad , \quad AA^\pi B = 0 \quad , \quad S = 0$ [۱۲]

۳) $CA^\pi B = 0 \quad , \quad CAA^\pi = 0 \quad , \quad S = 0$ [۱۲].

در این مقاله ما فرمولی برای $(P+Q)^d$ با شرایط $P^2QP = 0$، $PQP^2 = 0$ و $Q^2P = 0$ که تعمیم نتایجی از فرمول‌ها در [۱۱، ۱۶] می‌باشد را ارائه کرده و در ادامه با استفاده از این مطلب فرمول محاسباتی برای بدست آوردن M^d با دو سری از شرایط زیر را ارائه می‌دهیم:

$$a) S = 0 \quad , \quad BCA^\pi B = 0 \quad , \quad CA^\pi BCA = 0 \quad , \quad AA^\pi BC = 0$$

$$b) S = 0 \quad , \quad BCAA^\pi = 0 \quad , \quad CA^\pi BC = 0 \quad , \quad ABCA^\pi B = 0.$$

نتیجه (a) نتایج (۱) و (۲) در بالا را تعمیم می‌دهد، همچنین نتیجه (b) نتایج (۱) و (۳) را تعمیم

می‌دهد.

در اینجا قبل از پرداختن به نتایج اصلی بدست آمده، چندین لم به شرح زیر معرفی می‌کنیم:

لم ۱.۱. *[۱] فرض کنید $P \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $Q \in \mathbb{C}^{n\times m}$ باشند، در این صورت*

$$(PQ)^d = P\left((QP)^d\right)^{۲} Q = P\left((QP)^{۲}\right)^d Q\,.$$

لم ۲.۱. *[۱۳] فرض کنید $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشند بطوری‌که $ind(P) = s$ و $ind(Q) = t$ است، اگر $PQ = ۰$ باشد، آن‌گاه:*

$$(P+Q)^d = Q^{\pi}\sum_{i=۰}^{t-۱} Q^i \left(P^d\right)^{i+۱} + \sum_{i=۰}^{s-۱}\left(Q^d\right)^{i+۱} P^i P^{\pi}.$$

لم ۳.۱. *[۱] اگر $M = \begin{bmatrix} A & C \\ ۰ & B \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی بلوکی که A و B ماتریس‌های مربعی می‌باشند که $ind(A) = m$ و $ind(B) = n$ باشد، آن‌گاه $M^d = \begin{bmatrix} A^d & X \\ ۰ & B^d \end{bmatrix}$ می‌باشد که*

$$X = \sum_{i=۰}^{n-۱}\left(A^d\right)^{i+۲} CB^iB^{\pi} + A^{\pi}\sum_{i=۰}^{m-۱} A^iC\left(B^d\right)^{i+۲} - A^dCB^d.$$

لم ۴.۱. *[۱۵] فرض کنید $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی بلوکی باشد که A و B مربعی می‌باشند. اگر $S = D - CA^dB = ۰$، $A^{\pi}B = ۰$ و $CA^{\pi} = ۰$ باشد، آن‌گاه*

$$M^d = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix}\left((AW)^d\right)^{۲} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}$$

است که $W = AA^d + A^dBCA^d$.

یادآوری می‌کنیم که ماتریس مربعی N را پوچتوان از اندیس k گویند، هرگاه $N^k = ۰$ و $N^{k-۱} \neq ۰$.

نکته ۵.۱. فرض کنید $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد، در این صورت

اگر PQ پوچتوان از اندیس k باشد، آنگاه QP پوچتوان از اندیس l است که $l \in \{k-1, k, k+1\}$.

نکته ۶.۱. بنا بر تعریف معکوس درازین اگر $PQ = 0$ باشد، آن‌گاه

$$PQ^d = 0 \quad , \quad P^d Q = 0 \quad , \quad P^d Q^d = 0.$$

۲. نتایج اصلی

روش پیشنهادی در این قسمت نوشته شود.در این بخش ابتدا فرمولی برای معکوس درازین مجموع $P+Q$ با شرایط

$$P^{2}QP=0 \ , \ PQP^{2}=0 \ , \ Q^{2}P=0$$

ارائه می‌کنیم که ابزار مهم در نتایج بعدی می‌باشد.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید* $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ *باشند بطوریکه* $P^{2}QP=0$، $PQP^{2}=0$ و $Q^{2}P=0$ *باشد، در این صورت:*

$$\begin{aligned}(P+Q)^{d}&=(P+Q)\left(\sum_{i=0}^{l-1}\left(P^{d}\right)^{i+2}Q^{i}Q^{\pi}+\sum_{i=0}^{r-1}P^{\pi}P^{i}\left(Q^{d}\right)^{i+2}\right)+\\&\sum_{i=0}^{s}Q(PQ)^{\pi}(PQ)^{i}\left(Q^{d}\right)^{2(i+2)}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}\left(\left(P(QP)^{d}\right)^{i+1}+Q\left((PQ)^{d}\right)^{i+1}\right)Q^{2i}Q^{\pi}+\\&\sum_{i=0}^{s-2}P(QP)^{i+1}\left(Q^{d}\right)^{2(i+2)}-\sum_{i=0}^{s-1}P(QP)^{i+1}(QP)^{d}\left(Q^{d}\right)^{2(i+1)}\\&-QP^{d}Q^{d}-PP^{d}Q^{d}-Q^{d}-QP\left(Q^{d}\right)^{3}\end{aligned}$$

که $r=ind(P)$، $l=ind(Q)$ و $s=ind(QP)$.

اثبات. از تعریف معکوس درازین داریم:

$$(P+Q)^{d}=(P+Q)((P+Q)^{d})^{2}=(P+Q)((P+Q)^{2})^{d}=(P+Q)(P^{2}+QP+PQ+Q^{2})^{d}.$$

حال قرار می‌دهیم $F=Q^{2}+PQ$ و $G=P^{2}+QP$ که از شرایط قضیه؛ یعنی، $Q^{2}P=PQP^{2}=0$ داریم $FG=0$.

حال با استفاده از لم ۲.۱ خواهیم داشت:

$$(P+Q)^{d}=(P+Q)\left(\sum_{i=0}^{ind(G)-1}G^{\pi}G^{i}\left(F^{d}\right)^{i+1}+\sum_{i=0}^{ind(F)-1}\left(Q^{d}\right)^{i+1}F^{i}F^{\pi}\right). \qquad (۱.۲)$$

حال F^d و توان‌های آن را محاسبه می‌کنیم. چون $Q^2P=0$ است، لذا دوباره با استفاده از لم ۲.۱ برای هر $n\in\mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$\left(F^d\right)^n=\sum_{i=0}^{s}(PQ)^{\pi}\left(Q^d\right)^{2(i+n)}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\left((PQ)^d\right)^{i+n}Q^{2i}Q^{\pi}. \tag{۲.۲}$$

به‌طور مشابه با استفاده از لم ۲.۱ و چون $P^2QP=0$ است برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\left(G^d\right)^n=\left((QP)^d\right)^n+\left(P^d\right)^{2n}+Q\left(P^d\right)^{2n+1} \tag{۳.۲}$$

همچنین بنابر شرایط قضیه و با محاسبه‌ای ساده داریم:

$$\begin{cases} G^n=P^{2n}+QP^{2n-1}+(QP)^n & ,\ n\geqslant 2\\ F^n=\sum_{i=0}^{n}(PQ)^{n-i}Q^{2i} & ,\ n\geqslant 1\end{cases} \tag{۴.۲}$$

حال با قرار دادن فرمول‌های (۴.۲)، (۳.۲) و (۲.۲) در تساوی (۱.۲) اثبات کامل می‌شود. □

قضیه بعدی فرمولی متقارن بدست آمده از قضیه ۱.۲ است.

قضیه ۲.۲. *فرض کنید $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ باشند بطوری‌که $PQP^2=0$، $P^2QP=0$ و $PQ^2=0$ باشد،*

در این صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^d &= \left(\sum_{i=\circ}^{l-۱} Q^\pi Q^i \left(P^d\right)^{i+۲} + \sum_{i=\circ}^{r-۱} \left(Q^d\right)^{i+۲} P^i P^\pi\right)(P+Q)+\\
&\sum_{i=\circ}^{s} \left(Q^d\right)^{۲(i+۱)} (QP)^i (QP)^\pi Q + \sum_{i=\circ}^{\left[\frac{l-۱}{۲}\right]} \left(\left((PQ)^d\right)^{i+۱} P + Q^\pi Q^{۲i} \left((QP)^d\right)^{i+۱} Q+\right.\\
&\sum_{i=\circ}^{s-۲} \left(Q^d\right)^{۲(i+۲)} (PQ)^{i+۱} P - \sum_{i=\circ}^{s-۱} \left(Q^d\right)^{۲(i+۱)} (PQ)^{i+۱} (PQ)^d P\\
&-Q^d P^d Q - Q^d P P^d - Q^d - \left(Q^d\right)^۳ PQ
\end{aligned}
$$

که $r = ind(P)$ ، $l = ind(Q)$ و $s = ind(QP)$ است.

حال می‌توانیم موارد خاصی را از قضیه‌های ۱.۲ و ۲.۲ بصورت زیر بدست آوریم:

نتیجه ۳.۲. *فرض کنید $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و ماتریس PQ پوچتوان از اندیس k باشد. اگر $P^۲QP = \circ$، $PQP^۲ = \circ$ و $PQ^۲ = \circ$ باشد، آن‌گاه*

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^d &= \sum_{i=\circ}^{l-۱} \left(P^d\right)^{i+۱} Q^i Q^\pi + \sum_{i=\circ}^{r-۱} P^\pi P^i \left(Q^d\right)^{i+۱} + Q \sum_{i=\circ}^{r-۲} P^\pi P^{i+۱} \left(Q^d\right)^{i+۳}\\
&+ \sum_{i=\circ}^{k} P (QP)^{i+۱} \left(Q^d\right)^{۲(i+۲)} + Q \sum_{i=\circ}^{l-۱} \left(P^d\right)^{i+۲} Q^i Q^\pi + \sum_{i=\circ}^{k} (QP)^{i+۱} \left(Q^d\right)^{۲i+۳}\\
&-QP^d Q^d - QPP^d \left(Q^d\right)^۲ - QP\left(Q^d\right)^۳
\end{aligned}
$$

که $l = ind(Q)$ و $r = ind(P)$ است.

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و ماتریس QP پوچتوان از اندیس k باشد. اگر $P^۲QP = \circ$، $PQP^۲ = \circ$ و $PQ^۲ = \circ$ باشد، آن‌گاه*

$$(P+Q)^d=\sum_{i=0}^{l-1}Q^\pi Q^i\left(P^d\right)^{i+1}+\sum_{i=0}^{r-1}\left(Q^d\right)^{i+1}P^iP^\pi+\sum_{i=0}^{r-2}\left(Q^d\right)^{i+3}P^{i+1}P^\pi Q$$
$$+\sum_{i=0}^{k}\left(Q^d\right)^{2(i+1)}(PQ)^{i+1}P+\sum_{i=0}^{l-1}Q^\pi Q^i\left(P^d\right)^{i+2}Q+\sum_{i=0}^{k}\left(Q^d\right)^{2i+3}(PQ)^{i+1}$$
$$-Q^dP^dQ-\left(Q^d\right)^2PP^dQ-\left(Q^d\right)^3PQ$$

که $l=ind(Q)$ و $r=ind(P)$ است.

حال نتایج ۳.۲ و ۴.۲ را کمی خاص‌تر می‌کنیم.

نتیجه ۵.۲. *فرض کنید $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ و PQ پوچتوان از اندیس ۲ باشد. اگر $P^2QP=0$، $PQP^2=0$ و $Q^2P=0$ باشند، آن‌گاه*

$$(P+Q)^d=\sum_{i=0}^{l-1}\left(P^d\right)^{i+1}Q^iQ^\pi+\sum_{i=0}^{r-1}P^\pi P^i\left(Q^d\right)^{i+1}+Q\sum_{i=0}^{r-2}P^\pi P^{i+1}\left(Q^d\right)^{i+3}$$
$$+Q\sum_{i=0}^{l-1}\left(P^d\right)^{i+2}Q^iQ^\pi-QP^dQ^d-QPP^d\left(Q^d\right)^2$$

که $l=ind(Q)$ و $r=ind(P)$ است.

نتیجه ۶.۲. *فرض کنید $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ و QP پوچتوان از اندیس ۲ باشد. اگر $P^2QP=0$، $PQP^2=0$ و $PQ^2=0$ باشد، آن‌گاه*

$$(P+Q)^d=\sum_{i=0}^{r-1}Q^\pi Q^i\left(P^d\right)^{i+1}+\sum_{i=0}^{s-1}\left(Q^d\right)^{i+1}P^iP^\pi+\sum_{i=0}^{s-2}\left(Q^d\right)^{i+3}P^{i+1}P^\pi Q$$
$$+\sum_{i=0}^{r-1}Q^\pi Q^i\left(P^d\right)^{i+2}Q-Q^dP^dQ-\left(Q^d\right)^2PP^dQ$$

که $r=ind(Q)$ و $s=ind(P)$ است.

در ادامه مثالی می‌آوریم که در شرایط قضیه ۲.۲ این مقاله صدق می‌کند، اما در شرایط قضیه ۲.۲ از مقاله [۱۶] یعنی $PQP=0$ و $Q^2P=0$ صدق نمی‌کند.

مثال ۷.۲. ماتریس‌های $P,Q\in\mathbb{C}^{6\times 6}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که $a,b \in \mathbb{C}$ دلخواه می‌باشند. در این حالت داریم:

$$P^d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Q^d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و از اینکه $PQP \neq 0$ و $QPQ \neq 0$ است نتیجه می‌گیریم که این مثال در شرایط قضیه‌های مقاله [۱۶] صدق نمی‌کند اما $(PQ)^2 = 0$، $P^2QP = 0$، $PQP^2 = 0$ و $Q^2P = 0$ می‌باشد، همچنین داریم $ind(P) = 2$ و $ind(Q) = 3$.

لذا بنا بر نتیجه ۵.۲ خواهیم داشت:

$$(P+Q)^d=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -a \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2+2a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

۳. کاربردهایی برای بدست آوردن معکوس درازین ماتریس‌های بلوکی

در این بخش با استفاده از فرمول‌هایی که در بخش ۲ بدست آوردیم، معکوس درازین برخی از ماتریس‌های بلوکی را می‌یابیم.

فرض $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی بلوکی که A و D مربعی هستند و متمم شور تعمیم یافته آن؛ یعنی،
$S = D - CA^dB$ برابر با صفر باشد. Hartwig در مقاله [۱۲] شرایط مقاله‌ی [۱۵]؛ یعنی، $CA^\pi = 0$ و $A^\pi B = 0$ را به شرایط $CA^\pi B = 0$ و $CA^\pi A = 0$ تعمیم داد. ما در اینجا این شرایط را در قضیه ۱.۳ به شرایط $ABCA^\pi B = 0$، $CA^\pi BC = 0$ و $BCA^\pi A = 0$ تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱.۳. *فرض‌کنیم $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی بلوکی باشد که A و D مربعی می‌باشند و $S = D - CA^dB = 0$ است. اگر $ABCA^\pi B = 0$، $CA^\pi BC = 0$ و $BCA^\pi A = 0$ باشد، آن‌گاه*

$$M^d = \left[I + \begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_1^d + \sum_{i=0}^{r-1} \begin{bmatrix} 0 & A^iA^\pi B \\ 0 & CA^iA^\pi B \end{bmatrix} \left(P_1^d\right)^{i+2}\right] P_1^d \left[I + P_1^d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{bmatrix}\right]$$

که $r = ind(A)$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\left(P_1^d\right)^n = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} \left((AW)^d\right)^{n+1} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}$$

که $W = AA^d + A^dBCA^d$ می‌باشد.

اثبات. ابتدا ماتریس M را بصورت مجموع دو ماتریس به شکل زیر می‌نویسم:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^dB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2A^d & B \\ CAA^d & CA^dB \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} AA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

حال توجه می‌کنیم با قرار دادن $P = \begin{bmatrix} A^2A^d & B \\ CAA^d & CA^dB \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} AA^\pi & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{bmatrix}$ خواهیم داشت $M = P + Q$ که ماتریس‌های P و Q در شرایط نتیجه ۶.۲ صدق می‌کنند. لذا با استفاده از فرمولی که

برای $(P+Q)^d$ در نتیجه ۶.۲ ارائه شده اثبات کامل می‌شود.

$\square$

مثال ۲.۳. در اینجا مثالی می‌آوریم که برای ماتریس مربعی بلوکی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ شرایط قضیه ۱.۳ برقرار باشد. ماتریس‌های A، B، C و D را بصورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

در اینجا خواهیم داشت:

$$(A)^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (AW)^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و $ind(A) = 3$.

حال توجه می‌کنیم که متمم شور تعمیم یافته؛ یعنی، $S = D - CA^dB$ برابر باصفر است. همچنین شرایط قضیه ۱.۳ برقرار است. این مثال از این لحاظ حائز اهمیت است که $CA^\pi A \neq 0$ است؛ یعنی، شرایط نتیجه ۱.۲ در مقاله [۱۲] برقرار نیست لذا نشان دهنده‌ی این مطلب است که قضیه ۱.۳ تعمیمی مهم از نتیجه ۴.۲ مقاله [۱۲] می‌باشد. حال چون $CA^\pi BC = 0$، $BCA^\pi A = 0$ و $ABCA^\pi B = 0$ است لذا بنابر قضیه ۱.۳ معکوس درازین ماتریس بلوکی M بصورت زیر می‌باشد:

$$M^d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

در [۱۲]، Hartwig نمایشی برای معکوس درازین ماتریس بلوکی مربعی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ با شرایط $S = 0$، $CA^\pi B = 0$ و $AA^\pi B = 0$ ارائه داد. ما در قضیه‌ی بعد این شرایط را به $S = 0$، $CA^\pi BCA = 0$، $AA^\pi BC = 0$ و $BCA^\pi B = 0$ تعمیم داده و مثالی می‌آوریم که در شرایط مقاله Hartwig صدق نمی‌کند ولی در شرایط قضیه ۳.۳ صادق است و معکوس دازین آن را بدست می‌آوریم. اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه ۱.۳ است.

قضیه ۳.۳. *فرض $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ که A و D ماتریس‌های مختلط مربعی هستند، ماتریس مختلط مربعی بلوکی با متمم شور صفر باشد؛ یعنی، $S = D - CA^dB = 0$.*
اگر $CA^\pi BCA = 0$، $AA^\pi BC = 0$ و $BCA^\pi B = 0$ باشد، آن‌گاه:

$$M^d = \left[I + \begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_1^d\right] P_1^d \left[I + P_1^d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{r-1} \left(P_1^d\right)^{i+2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{i+1}A^\pi & CA^iA^\pi B \end{bmatrix}\right]$$

که $ind(A) = r$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\left(P_1^d\right)^n = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} \left((AW)^d\right)^{n+1} \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}$ که $W = AA^d + A^dBCA^d$.

مثال ۴.۳. ماتریس بلوکی مربعی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ با بلوک‌های

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}، C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در اینجا خواهیم داشت:

$$(A)^d=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad (AW)^d=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

و $ind(A)=۲$.

با محاسباتی ساده می‌توان دید که $S=۰$ است و $CA^{\pi}B\neq ۰$ می‌باشد؛ یعنی، این مثال در شرایط قضیه ارائه شده در مقاله [۱۲] صدق نمی‌کند. اما $CA^{\pi}BCA=۰$، $AA^{\pi}BC=۰$ و $BCA^{\pi}B=۰$ می‌باشد که همان شرایط قضیه ۳.۳ است. بنابراین معکوس درازین ماتریس بلوکی M بصورت زیر می‌باشد:

$$M^d=\begin{bmatrix} \frac{۲}{۲۷} & \frac{-۸}{۲۴۳} & \frac{۲}{۲۷} & \frac{۴}{۸۱} & \frac{۴}{۲۷} & \frac{-۵۰}{۷۲۹} & \frac{۵۸}{۷۲۹} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲۷} & \frac{-۴}{۲۴۳} & \frac{۱}{۲۷} & \frac{۲}{۸۱} & \frac{۲}{۸۱} & \frac{-۲۵}{۷۲۹} & \frac{۲۹}{۷۲۹} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۹} & \frac{-۴}{۸۱} & \frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۲۷} & \frac{۲}{۹} & \frac{-۲۵}{۲۴۳} & \frac{۲۹}{۲۴۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

مراجع

[1] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, second ed., Springer Verlag, New York, 2003.

[2] C. Bu, C. Feng and S. Bai, Representations for the Drazin inverses of the100 sum of two matrices and some block matrices, *J. Appl. Math. Comput.*, **218** (2012), 10226–10237.

[3] S.L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[4] S.L. Campbell and C.D. Meyer, *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Pitman, London, 1979, (Dover, New York, 1991).

[5] N. Castro-Gonz´alez, E. Dopazo and M.F. Mart´ınez-Serrano, On the Drazin inverse of the sum of two operators and its application to operator matrices, *J. Math. Anal. Appl.*, **350** (2008), 207–215.

[6] N. Castro-Gonz´alez, Additive perturbations results for the Drazin inverse, *Linear Algebra Appl.*, **397** (2005), 279–297.

[7] D.S. Cvetkovi´c-Ili ´c, D.S. Djordjevi´c and Y. Wei, Additive result for the generalized Drazin inverse in a Banach space, *Linear Algebra Appl.*, **418** (2006), 53–61.

[8] R. Yousefi and M. Dana, Generalizations of Some Conditions for Drazin Inverses of the Sum of Two Matrices, *Filomat*, **32**(18) (2018), 1417–1430.

[9] M. Dana and R. Yousefi, Formulas for the Drazin inverse of matrices with new conditions and its applications, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, **4**(1) (2018), doi:10.1007/S40819-017-0459-5.

[10] J. Ljubisavljevi´c and D.S. Cvetkovi´c-Ili´c, Additive results for the Drazin inverse of block matrices and applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **235**(12) (2011), 3683–3690.

[11] M.P. Drazin, Pseudoinverse in associative rings and semigroups, *Am. Math. Mon.*, **65** (1958), 506–514.

[12] R.E. Hartwig, X. Li and Y. Wei, Representations for the Drazin inverse of 2×2 block matrix, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **27** (2006), 757–771.

[13] R.E. Hartwig, G. Wang and Y. Wei, Some additive results on Drazin inverse, *Linear Algebra Appl.*, **322** (2001), 207–217.

[14] M.F. Mart´ınez-Serrano and N. Castro-Gonz´alez, On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement, *Appl. Math. Comput.*, **215** (2009), 2733–2740.

[15] J. Miao, Results of the Drazin inverse of block matrices, *J. Shanghai Norm. Univ., Nat. Sci.*, **18** (1989), 25–31.

[16] H. Yang and X. Liu, The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **235** (2011), 1412–1417.

[17] X. Liu, L. Xu and Y. Yu, The explicit expression of the Drazin inverse of sums of two matrices

and its application, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, **33** (2014), 45–62.

[18] L. Guo, j. Chen and H. Zou, Representations for the Drazin Inverse of the Sum of Two Matrices and its Applications, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **45** (2019), 683–699.

[19] X. Liu, The representations for the Drazin inverse of a sum of two matrices involving an idempotent matrix and applications, *J. Comput. Anal. Appl.*, **18**(1) (2015), 121–137.

[20] Y. Wei, X. Li, F. Bu and F. Zhang, Relative perturbation bounds for the eigenvalues of diagonalizable and singular matrices-application of perturbation theory for simple invariant subspaces, *Linear Algebra Appl.*, **419** (2006), 765–771.

[21] X. Chen and R.E. Hartwig, The group inverse of a triangular matrix, *Linear Algebra Appl.*, **237-238** (1996), 97–108.

[22] A. Tajmouati, M. Karmouni and M.B. Mohamed Ahmed, New extensions of cline's formula for generalized Drazin-Riesz inverses, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **60**(2) (2019), 567–572.