

بعد از آن نیز جواب مجهول توسط موجک‌های لژاندر دوبعدی تقریب زده می‌شود. پس از آن با به‌کار بردن ماتریس عملگر مشتق محاسبه جواب مساله در هر گام زمانی به حل یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌شود. در مرحله آخر نیز با حل این دستگاه جواب‌های تقریبی مساله در زمان مورد نظر به‌دست می‌آیند.

۱. مقدمه

معادله شرودینگر غیرخطی یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در فیزیک ریاضی می‌باشد که کاربردهای زیادی در فونوتیک^۱ [۱]، اپتیک غیرخطی^۲ [۲]، فیزیک پلاسما^۳ [۳]، مکانیک کوانتوم^۴ [۴]، وانتشار امواج الکترومغناطیسی^۵ [۵] دارد. مدل کسری معادله شرودینگر غیرخطی، مدل بسیار مهمی است که در توصیف سیستم‌های فیزیکی غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدل از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است که در این مورد به عنوان مثال می‌توان به [۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] و مراجع آنها مراجعه کرد.

دستگاهی از معادلات شرودینگر غیرخطی کسری در زمینه‌های مختلف فیزیک، هیدرودینامیک^۶، و اپتیک^۷، ظاهر می‌شوند [۱۳]. این جفت از معادلات، تعامل بین دو موج با فرکانس‌های مختلف یا با فرکانس‌های یکسان اما بسته به دو قطبش متفاوت را توصیف می‌کنند [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶]. مطالعات بسیاری وجود دارد که به حل عددی انواع مختلف دستگاهی از معادلات شرودینگر غیرخطی کسری اختصاص داده شده است که به عنوان مثال می‌توان به [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱] و مراجع آنها مراجعه

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: m.hoseininia@stu.yazd.ac.ir (معصومه حسینی‌نیا)، heydari@sutech.ac.ir (محمد حسین حیدری)، maalek@yazd.ac.ir (فرید(محمد) مالک قایینی).

<http://doi.org/10.22072/wala.2020.119323.1263>

موجک‌ها و جبرخطی (۱۴۰۰) ©

¹Plasma physics

²Nonlinear optic

³Plasma physics

⁴Quantum mechanics

⁵Electromagnetic wave propagation

⁶Hydrodynamics

⁷Optics

۱۲۱ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲ کرد.

موجک‌های لژاندر به عنوان کلاس مهمی از موجک‌ها خواص مفیدی مانند دقت طیفی، محمل فشرده و تعامد دارند، در سال‌های اخیر، از آنها در حل مسائل مختلف استفاده شده است. در [۲۲] از این توابع برای حل معادله تلگراف کسری استفاده کردند. یک ماتریس عملگری بر اساس موجک‌ها در [۲۳] را برای حل عددی معادله پخش-موج پیشنهاد داده‌اند. از این توابع پایه در [۲۴] برای حل یک طبقه از مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. موجک‌های لژاندر در [۲۵] برای حل عددی معادله زیرپخش کسری به کار برده شده است. حیدری و عوض‌زاده در [۲۶] با استفاده از این موجک‌ها یک روش بهینه‌سازی برای حل معادله پوآسون کسری از مرتبه متغیر را ارائه دادند. در [۲۷] با استفاده از این توابع پایه‌ای دسته‌ای از مسایل کنترل بهینه غیرخطی کسری از مرتبه متغیر حل گردیده است. در [۲۹] یک روش نیمه گسسته بر اساس موجک لژاندر دوبعدی برای مدل کسری مرتبه متغیر معادله کلاین-گوردن غیرخطی پیشنهاد شده است. حسینی‌نیا و همکاران در [۲۸] این توابع پایه‌ای را برای حل مدل کسری مرتبه متغیر معادله زیست‌گرمایی با فاز تاخیری دوگانه به کار برده‌اند. اخیراً حسینی‌نیا و همکاران در [۳۰] یک روش نیمه گسسته بر اساس موجک لژاندر دوبعدی را برای معادله واکنش-پخش دوبعدی کسری از مرتبه متغیر ارائه دادند.

هدف اصلی این فصل، ارائه یک روش نیمه گسسته بر اساس موجک‌های لژاندر دوبعدی برای حل عددی یک دستگاه معادلات شرودینگر غیرخطی کسری فراکتالی شامل مشتقات با هسته نامنفرد میتاگ-لفلر می‌باشد. بنابراین دستگاه

$$\begin{aligned} i {}_0^{\text{FFM}} \longrightarrow D_t^{\alpha,\beta} u(\mathbf{x}, t) + \xi \Delta u(\mathbf{x}, t) + \sigma \left(|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2 \right) u(\mathbf{x}, t) + w_1(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), \\ i {}_0^{\text{FFM}} \longrightarrow D_t^{\mu,\nu} v(\mathbf{x}, t) + \xi \Delta v(\mathbf{x}, t) + \sigma \left(|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2 \right) v(\mathbf{x}, t) + w_2(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

را که در آن $t > 0$ ، $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ با شرایط اولیه

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad v(\mathbf{x}, t) = \tilde{h}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن $i = \sqrt{-1}$ یکه موهومی بوده و $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عملگر لاپلاس است. توابع $u(\mathbf{x}, t)$ و $v(\mathbf{x}, t)$ توابع مختلط مجهول را نشان می‌دهند، $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ بوده و $\partial\Omega$ مرز Ω می‌باشد. توابع f و g نیز توابع مفروض با مقادیر مختلط می‌باشند. توابع $w_1(\mathbf{x})$ و $w_2(\mathbf{x})$ توابع حقیقی مقدار و ξ و σ ثابت‌های معلوم می‌باشند. توابع مختلط u_0 و v_0 به عنوان شرایط اولیه و توابع مختلط h و \tilde{h} نیز به عنوان شرایط مرزی تعریف می‌شوند. در این معادلات ${}^{FFM} D_t^{\alpha, \beta} \rightarrow D_t^{\alpha, \beta}$ و ${}^{FFM} D_t^{\mu, \nu} \rightarrow D_t^{\mu, \nu}$ به ترتیب عملگرهای مشتق کسری-فراکتال از مرتبه‌های (α, β) و (μ, ν) را بیان می‌کنند [۳۱، ۳۲].
ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ مشتق کسری-فراکتال را معرفی نموده و خواص آن را بیان می‌کنیم. در بخش ۳ موجک‌های لژاندر دوبعدی و برخی از خواص آنها معرفی شده است. سپس با استفاده از موجک‌های لژاندر دوبعدی، مساله مورد نظر را در بخش ۴ حل می‌نماییم. در بخش ۵ نتایج عددی چندین مثال برای بررسی دقت و صحت روش پیشنهادی ارائه شده است. این مقاله با یک نتیجه‌گیری مختصر در بخش ۶ به پایان می‌رسد.

۲. مشتق کسری-فراکتال

در این بخش به ارائه مفهوم جدیدی از مشتق می‌پردازیم که ترکیبی از مشتق فراکتال و مشتق کسری می‌باشد. سپس بعضی خواص آن را نیز ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۰۲. تابع میتاگ-لفلر $E_{\vartheta}(z)$ با یک پارامتر مثبت ϑ توسط سری توانی زیر تعریف می‌شود
([۱])

$$E_{\vartheta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\vartheta + 1)}, \quad (1.2)$$

⁸Mittag-Leffler

۱۲۳ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲

واضح است که $\mathbf{E}_1(z) = \exp(z)$ و همچنین $\mathbf{E}_\vartheta(0) = 1$.

تعریف ۲.۲. تابع میتاگ-لفلر $\mathbf{E}_{\vartheta,\mu}(z)$ با دو پارامتر مثبت ϑ و μ توسط سری توانی زیر تعریف می‌شود ([۱])

$$\mathbf{E}_{\vartheta,\mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j\vartheta + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

واضح است که اگر $\mu = 1$ ، آنگاه داریم $\mathbf{E}_{\vartheta,1}(z) = \mathbf{E}_\vartheta(z)$.

تعریف ۳.۲. ([۳۱]). فرض کنید $u(\mathbf{x}, t)$ یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر فراکتالی از مرتبه β باشد. مشتق کسری-فراکتال از مرتبه (α, β) تابع $u(\mathbf{x}, t)$ از نوع ریمان-لیوویل-آتانگانا با هسته نامنفرد میتاگ-لفلر به صورت

$$\left({}^{\text{FFM}}_0 \rightarrow D_t^{\alpha,\beta} \right) u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt^\beta} \int_0^t u(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{E}_\alpha \left(\frac{-\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right) d\tau, \quad (3.2)$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{AB}(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ است و

$$\frac{du(\mathbf{x}, t)}{dt^\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{x}, t + \Delta t) - u(\mathbf{x}, t)}{(t + \Delta t)^\beta - t^\beta}.$$

عملگر مشتق کسری-فراکتال ذکر شده در رابطه بالا را می‌توانیم به صورت زیر نیز نمایش دهیم:

$$\left({}^{\text{FFM}}_0 \rightarrow D_t^{\alpha,\beta} \right) u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t u(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{E}_\alpha \left(\frac{-\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right) d\tau. \quad (4.2)$$

لم ۴.۲. اگر α و β مقادیر ثابت در $(0, 1)$ باشند و $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ آنگاه

$$\left({}^{\text{FFM}}_0 \rightarrow D_t^{\alpha,\beta} \right) t^r = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)r! t^{r-\beta+1}}{\beta(1-\alpha)} \mathbf{E}_{\alpha,r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right). \quad (5.2)$$

اثبات. با استناد به ۳.۲، برهان بدیهی هست. □

نتیجه ۵.۲. مشتق کسری- فراکتال توابع نمایی و مثلثاتی بر اساس لم ۴.۲، به صورت‌های زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} {}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} e^t &= \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} t^r \mathbf{E}_{\alpha, r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right), \\ {}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} e^{-t} &= \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^r \mathbf{E}_{\alpha, r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right), \\ {}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} \sin(t) &= \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{\gamma-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right), \\ {}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} \cos(t) &= \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

اثبات. با توجه به سری‌های تیلور توابع ذکر شده و لم ۳.۲، برهان بدیهی می‌باشد. □

۳. موجک‌های لژاندر و برخی خواص آنها

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع هستند که از انتقال^۹ و اتساع^{۱۰} تابعی به نام موجک مادر^{۱۱} ساخته می‌شوند. با تغییر پارامترهای انتقال b و اتساع a خانواده توابع موجک $\psi_{ab}(t)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-\frac{1}{\gamma}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

اگر پارامترهای a و b را به مقادیر گسسته $a = a_0^{-k}$ و $b = nb_0 a_0^{-k}$ محدود کنیم ($a_0 > 1, b_0 > 0$) آنگاه خانواده‌ای از موجک‌های گسسته به صورت زیر را داریم

$$\psi_{kn}(t) = |a_0|^{-\frac{k}{\gamma}} \psi \left(a_0^k t - nb_0 \right), \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

⁹Translation

¹⁰Dilation

¹¹Mother wavelet

۱۲۵ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲

که در آن $\psi_{kn}(t)$ یک پایه متعامد برای فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ را تشکیل می‌دهد. به ویژه زمانی که $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ باشند، آنگاه $\psi_{kn}(t)$ یک پایه متعامد یکه را برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهد، یعنی

$$\langle \psi_{k,n}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \delta_{kl} \delta_{nm}.$$

در این مقاله از پایه‌های موجکی دو بعدی لژاندر استفاده می‌نماییم، در این راستا ابتدا پایه‌های موجکی یک بعدی لژاندر و سپس پایه‌های موجکی دو بعدی لژاندر را معرفی نموده و نحوه تقریب توابع دو متغیره به کمک آنها را نیز بیان می‌کنیم.

۱.۳. موجک لژاندر یک بعدی

موجک لژاندر یک بعدی روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۹]:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} P_m(2^{k+1}t - 2n + 1), & t \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}\right], \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (1.3)$$

که در آن $n = 1, 2, \dots, 2^k$ و $m = 0, 1, \dots, M-1$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ و $M \in \mathbb{N}$. $P_m(t)$ ها چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر از درجه m روی بازه $[-1, 1]$ و دو به دو متعامد نسبت به تابع وزن $w(t) = 1$ می‌باشند و ضمناً در فرمول بازگشتی زیر صدق می‌کنند [۳۳]:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1}t P_m(t) - \frac{m}{m+1}P_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots$$

۲.۳. موجک لژاندر دو بعدی

موجک‌های لژاندر دو بعدی روی بازه $[0, 1] \times [0, 1]$ برحسب موجک‌های لژاندر یک بعدی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\psi_{nm,n'm'}(x,y) = \begin{cases} \psi_{nm}(x)\psi_{n'm'}(y), & (x,y) \in \left[\frac{n-1}{2^k}, \frac{n}{2^k}\right] \times \left[\frac{n'-1}{2^{k'}}, \frac{n'}{2^{k'}}\right], \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (2.3)$$

۱۲۶ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی (۳) ۱۴۰۰ (۱۱۹-۱۵۲)

که در آن $n = 1, 2, \dots, 2^k$ و $n' = 1, 2, \dots, 2^{k'}$ و $m = 0, 1, \dots, M-1$ و $m' = 0, 1, \dots, M'-1$ پایه‌های لژاندر دوبعدی در $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ دو به دو متعامد یکه هستند یعنی

$$\begin{aligned} \langle \psi_{nm,kl}(x, y), \psi_{n'm',k'l'}(x, y) \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 \psi_{nm,kl}(x, y) \psi_{n'm',k'l'}(x, y) dx dy \\ &= \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{kk'} \delta_{ll'}. \end{aligned}$$

تابع $u(x, y)$ را برحسب پایه‌های موجکی لژاندر دوبعدی بر روی $[0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیر می‌توانیم بسط دهیم

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} u_{nm,n'm'} \psi_{nm,n'm'}(x, y), \quad (3.3)$$

که در آن $u_{nm,n'm'} = \langle u(x, y), \psi_{nm,n'm'}(x, y) \rangle$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ حاصلضرب داخلی روی $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ می‌باشد، یعنی

$$u_{nm,n'm'} = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y) \psi_{nm,n'm'}(x, y) dx dy.$$

تابع $u(x, y)$ را می‌توان به صورت سری متناهی زیر تقریب زد

$$u(x, y) \approx \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'}} \sum_{m'=0}^{M'-1} u_{nm,n'm'} \psi_{nm,n'm'}(x, y) \triangleq U^T \Psi(x, y), \quad (4.3)$$

۱۲۷ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲

که در آن U و $\Psi(x, y)$ بردارهای ستونی $(\Psi^k M')$ $(\Psi^k M)$ بعدی می‌باشند. برای ساده‌نویسی می‌توانیم عبارت بالا را به صورت زیر نیز بنویسیم

$$u(x, y) \simeq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N'} u_{ij} \psi_{ij}(x, y) \triangleq U^T \Psi(x, y) = \Psi(x, y)^T U, \quad (5.3)$$

که در آن $u_{ij} = u_{nm, n' m'}$ و $\psi_{ij}(x, y) = \psi_{nm, n' m'}(x, y)$ بوده و i و j توسط روابط زیر تعیین می‌شوند

$$i = M(n - 1) + m + 1, \quad j = M'(n' - 1) + m' + 1.$$

بنابراین داریم

$$U = [u_{11} \ u_{12} \ \dots \ u_{1N'} | u_{21} \ u_{22} \ \dots \ u_{2N'} | \dots | u_{N1} \ u_{N2} \ \dots \ u_{NN'}]^T,$$

و

$$\Psi(x, y) = [\psi_{11}(x, y) \ \psi_{12}(x, y) \ \dots \ \psi_{1N'}(x, y) | \psi_{21}(x, y) \ \psi_{22}(x, y) \ \dots \ \psi_{2N'}(x, y) | \dots | \psi_{N1}(x, y) \ \psi_{N2}(x, y) \ \dots \ \psi_{NN'}(x, y)]^T, \quad (6.3)$$

طبق توضیحات بالا، یک تابع را می‌توان برحسب پایه موجک‌های لژاندر تقریب زده، و با استفاده از ماتریس‌های عملگری، روش‌های تقریبی موجکی را برای حل معادلات تابعی ارائه داد.

قضیه ۱.۳. ([۳۴]). فرض کنید $\Psi(x, y)$ بردار موجک لژاندر دوبعدی تعریف شده در معادله (۶.۳) باشد. آنگاه داریم

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = \mathbf{D}_x \Psi(x, y), \quad (7.3)$$

که در آن ماتریس \mathbf{D}_x با بعد $NN' \times NN'$ ، ماتریس عملگر مشتق دوبعدی نسبت به x نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{D}_x = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

که در آن \mathbf{O} (ماتریس صفر) و \mathbf{D} ماتریس‌های $MN' \times MN'$ می‌باشند که درایه‌های ماتریس \mathbf{D} به صورت زیر محاسبه می‌گردند

$$d_{ij} = \begin{cases} 2^{k+1} \sqrt{(2i-1)(2j-1)} \mathbf{I}, & i = 2, \dots, M, \quad j = 1, \dots, i-1, \\ \mathbf{O}, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

و \mathbf{I} و \mathbf{O} به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی $N' \times N'$ می‌باشند.

قضیه ۲.۳. ([۳۴]). فرض کنید بردار موجک لژاندر دوبعدی تعریف شده در معادله (۶.۳) باشد. آنگاه مشتق $\Psi(x, y)$ نسبت به y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \mathbf{D}_y \Psi(x, y), \quad (۸.۳)$$

که در آن \mathbf{D}_y ماتریس عملگر مشتق موجک لژاندر دوبعدی نسبت به متغیر y نامیده شده و به صورت

$$\mathbf{D}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

تعریف می‌شود، که در آن \mathbf{D} و $\hat{\mathbf{O}}$ ماتریس‌های $MM' \times MM'$ هستند، به طوریکه

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \hat{\mathbf{O}} & \dots & \hat{\mathbf{O}} \\ \hat{\mathbf{O}} & \mathbf{F} & \dots & \hat{\mathbf{O}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{O}} & \hat{\mathbf{O}} & \dots & \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

که در آن $\hat{\mathbf{O}}$ و \mathbf{F} ماتریس‌های $M' \times M'$ می‌باشند و درایه‌های \mathbf{F} به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f_{ij} = \begin{cases} \gamma^{k'+1} \sqrt{(2i-1)(2j-1)}, & i = 2, \dots, M', \quad j = 1, \dots, i-1, \text{ فرد هست } (i+j) \\ 0, & \text{در غیر اینصورت.} \end{cases}$$

نتیجه ۳.۳. با استفاده از دو معادله ۷.۳ و ۸.۳ می‌توانیم ماتریس‌های عملگر مشتقات جزئی مراتب بالاتر را نیز به صورت‌های زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r \Psi(x, y)}{\partial x^r} &= \mathbf{D}_x^{(r)} \Psi(x, y), & \frac{\partial^l \Psi(x, y)}{\partial y^l} &= \mathbf{D}_y^{(l)} \Psi(x, y), \\ \frac{\partial^{r+l} \Psi(x, y)}{\partial x^r \partial y^l} &= \mathbf{D}_x^{(r)} \mathbf{D}_y^{(l)} \Psi(x, y), \end{aligned} \quad (9.3)$$

که در آن $\mathbf{D}_x^{(r)}$ و $\mathbf{D}_y^{(l)}$ به ترتیب r امین و l امین توان ماتریس‌های \mathbf{D}_x و \mathbf{D}_y هستند.

۴. روش پیشنهادی

در این بخش روش موجک برای حل مدل کسری- فراکتال معرفی شده در معادله‌های (۱.۱)-(۳.۱) را ارائه می‌دهیم.

۱.۴. گسسته سازی مشتقات کسری- فراکتال

در این قسمت به بررسی گسسته‌سازی مشتقات کسری- فراکتال در معادله‌های (۱.۱) روی دامنه زمانی $[0, T]$ می‌پردازیم. از معادله‌های (۱.۲) و (۴.۲) داریم

$${}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^r}{(1-\alpha)^r \Gamma(r\alpha + 1)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{r\alpha} u(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (1.4)$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{r\alpha} u(\mathbf{x}, \tau) d\tau = t^{r\alpha} u(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t (t-\tau)^{r\alpha} u_{\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

با جایگذاری معادله (۲.۴) در معادله (۱.۴) به دست می‌آوریم

$${}^{\circ}FFM \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^r}{(1-\alpha)^r \Gamma(r\alpha + 1)} \left(t^{r\alpha} u(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t (t-\tau)^{r\alpha} u_{\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right). \quad (3.4)$$

و با جایگذاری t^{n+1} داخل معادله (۳.۴)، رابطه

$${}^{\circ}FFM \longrightarrow D_{t^{n+1}}^{\alpha, \beta} u(\mathbf{x}, t^{n+1}) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)(t^{n+1})^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^r}{(1-\alpha)^r \Gamma(r\alpha + 1)} \left((t^{n+1})^{r\alpha} u(\mathbf{x}, 0) + \int_0^{t^{n+1}} (t^{n+1} - s)^{r\alpha} u_{\tau}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right), \quad (4.4)$$

را به دست می‌آوریم که در آن $t^n = n\delta t$ برای $n = 0, 1, \dots, \bar{N}$ بوده و $\delta t = T/\bar{N}$ طول گام زمانی می‌باشد. سپس با استفاده از روش تفاضلات متناهی، داریم

$${}^{\circ}FFM \rightarrow D_{t^{n+1}}^{\alpha, \beta} u^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)(t^{n+1})^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{j=0}^n \left(\frac{u^{j+1}(\mathbf{x}) - u^j(\mathbf{x})}{\delta t} + O(\delta t) \right) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^r \frac{1}{\Gamma(r\alpha + 1)} \int_{j\delta t}^{(j+1)\delta t} (t^{n+1} - \tau)^{r\alpha} d\tau, \quad (5.4)$$

که در آن $u^j(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t^j)$. انتگرال ظاهر شده در معادله (۵.۴) را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم

$$\int_{j\delta t}^{(j+1)\delta t} (t^{n+1} - \tau)^{r\alpha} d\tau = \frac{(\delta t)^{r\alpha+1}}{r\alpha + 1} \left[(n - j + 1)^{r\alpha+1} - (n - j)^{r\alpha+1} \right]. \quad (6.4)$$

با جایگذاری معادله (۶.۴) در معادله (۵.۴) به دست می‌آوریم

$${}^{\circ}FFM \rightarrow D_{t^{n+1}}^{\alpha, \beta} u^{n+1}(\mathbf{x}) = m_{\alpha, \beta}^{n+1} \left(a_{\alpha}^{n+1} u^{\circ}(\mathbf{x}) + b_{\alpha} u^{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n c_{\alpha j} u^{n-j}(\mathbf{x}) \right) + O((\delta t)^{2+r\alpha}), \quad (7.4)$$

که در آن $m_{\alpha, \beta}^{n+1} = \frac{\mathbf{AB}(\alpha)((n+1)\delta t)^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)}$ و

$$a_{\alpha}^{n+1} = \mathbf{E}_{\alpha} \left(\frac{-\alpha((n+1)\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) + (n+1)\mathbf{E}_{\alpha, 2} \left(\frac{-\alpha((n+1)\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) - n\mathbf{E}_{\alpha, 2} \left(\frac{-\alpha(n\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right),$$

$$b_{\alpha} = \mathbf{E}_{\alpha, 2} \left(\frac{-\alpha(\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right),$$

$$c_{\alpha j} = (j+2)\mathbf{E}_{\alpha, 2} \left(\frac{-\alpha((j+2)\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) - j\mathbf{E}_{\alpha, 2} \left(\frac{-\alpha(j\delta t)^{\alpha}}{1-\alpha} \right).$$

به طور مشابه، در مورد مشتق کسری- فراکتال معادله دوم در دستگاه ۱.۱ داریم

$${}^{\circ}FFM D_{t^{n+1}}^{\mu, \nu} v^{n+1}(\mathbf{x}) = m_{\mu, \nu}^{n+1} \left(a_{\mu}^{n+1} v^{\circ}(\mathbf{x}) + b_{\mu} v^{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n c_{\mu j} v^{n-j}(\mathbf{x}) \right) + O((\delta t)^{\nu+r\mu}), \quad (۸.۴)$$

$$m_{\mu, \nu}^{n+1} = \frac{\mathbf{AB}(\mu) ((n+1)\delta t)^{1-\nu}}{\nu(1-\mu)} \quad \text{که در آن}$$

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{n+1} &= \mathbf{E}_{\mu} \left(\frac{-\mu((n+1)\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right) + (n+1)\mathbf{E}_{\mu, \nu} \left(\frac{-\mu((n+1)\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right) - n\mathbf{E}_{\mu, \nu} \left(\frac{-\mu(n\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right), \\ b_{\mu} &= \mathbf{E}_{\mu, \nu} \left(\frac{-\mu(\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right), \\ c_{\mu j} &= (j+2)\mathbf{E}_{\mu, \nu} \left(\frac{-\mu((j+2)\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right) - j\mathbf{E}_{\mu, \nu} \left(\frac{-\mu(j\delta t)^{\mu}}{1-\mu} \right). \end{aligned}$$

۲.۴. معرفی رابطه بازگشتی

در این بخش یک فرمول بازگشتی برای مساله کسری- فراکتال بیان شده در معادله (۱.۱) را با به‌کار بردن روش تفاضلات متناهی و روش تفاضلات متناهی وزن‌دار شده با پارامتر ν به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} i^{\circ}FFM \longrightarrow D_{t^{n+1}}^{\alpha, \beta} u^{n+1}(\mathbf{x}) + \xi \left(\theta \Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) + (1-\theta) \Delta u^n(\mathbf{x}) \right) + \sigma \left(|u^n(\mathbf{x})|^{\nu} + |v(\mathbf{x})^n|^{\nu} \right) u^n(\mathbf{x}) \\ + w_1(\mathbf{x}) \left(\theta u^{n+1}(\mathbf{x}) + (1-\theta) u^n(\mathbf{x}) \right) = f^{n+1}(\mathbf{x}), \\ i^{\circ}FFM \longrightarrow D_{t^{n+1}}^{\mu, \nu} v^{n+1}(\mathbf{x}) + \xi \left(\theta \Delta v^{n+1}(\mathbf{x}) + (1-\theta) \Delta v^n(\mathbf{x}) \right) + \sigma \left(|u^n(\mathbf{x})|^{\nu} + |v(\mathbf{x})^n|^{\nu} \right) v^n(\mathbf{x}) \\ + w_2(\mathbf{x}) \left(\theta v^{n+1}(\mathbf{x}) + (1-\theta) v^n(\mathbf{x}) \right) = g^{n+1}(\mathbf{x}), \quad (۹.۴) \end{aligned}$$

که در آن‌ها $u^{n+1}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t^{n+1})$ ، $v^{n+1}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}, t^{n+1})$ ، $f^{n+1}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t^{n+1})$ و $g^{n+1}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, t^{n+1})$. سپس با جایگذاری معادله‌های (۷.۴) و (۸.۴) در معادله‌های (۹.۴) و حذف عبارات خطا

$$\begin{aligned}
 im_{\alpha,\beta}^{n+1} b_{\alpha} u^{n+1}(\mathbf{x}) + \xi\theta\Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_{\gamma}(\mathbf{x})u^{n+1}(\mathbf{x}) &= -im_{\alpha,\beta}^{n+1} a_{\alpha}^{n+1} u^{\circ}(\mathbf{x}) \\
 &- \xi(1-\theta)\Delta u^n(\mathbf{x}) - \sigma\left(|u^n(\mathbf{x})|^{\gamma} + |v^n(\mathbf{x})|^{\gamma}\right)u^n(\mathbf{x}) \\
 &- (1-\theta)w_{\gamma}(\mathbf{x})u^n(\mathbf{x}) - im_{\alpha,\beta}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\alpha j} u^{n-j}(\mathbf{x}) + f^{n+1}(\mathbf{x}), \\
 im_{\mu,\nu}^{n+1} b_{\mu} v^{n+1}(\mathbf{x}) + \xi\theta\Delta v^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_{\gamma}(\mathbf{x})v^{n+1}(\mathbf{x}) &= -im_{\mu,\nu}^{n+1} a_{\mu}^{n+1} v^{\circ}(\mathbf{x}) \\
 &- \xi(1-\theta)\Delta v^n(\mathbf{x}) - \sigma\left(|u^n(\mathbf{x})|^{\gamma} + |v^n(\mathbf{x})|^{\gamma}\right)v^n(\mathbf{x}) \\
 &- (1-\theta)w_{\gamma}(\mathbf{x})v^n(\mathbf{x}) - im_{\mu,\nu}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\mu j} v^{n-j}(\mathbf{x}) + g^{n+1}(\mathbf{x}). \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

توابع مختلط مجهول مساله فوق را بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی‌شان به صورت‌های

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) &= u_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i u_{\gamma}(\mathbf{x}, t), & v(\mathbf{x}, t) &= v_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i v_{\gamma}(\mathbf{x}, t), \\
 f(\mathbf{x}, t) &= f_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i f_{\gamma}(\mathbf{x}, t), & g(\mathbf{x}, t) &= g_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i g_{\gamma}(\mathbf{x}, t),
 \end{aligned} \quad (11.4)$$

بیان می‌نماییم که در آن‌ها $u_{\ell}, v_{\ell}, f_{\ell}, g_{\ell}$ برای $\ell = 1, 2$ توابع حقیقی می‌باشند. هم‌چنین توابع مختلط معلوم $u_{\circ}(\mathbf{x}, \circ), v_{\circ}(\mathbf{x}, \circ), h(\mathbf{x}, t), \tilde{h}(\mathbf{x}, t)$ در معادله‌های (۲.۱) و (۳.۱) را می‌توانیم به صورت‌های زیر در نظر بگیریم

$$\begin{aligned}
 u_{\circ}(\mathbf{x}, \circ) &= u_{\gamma_{\circ}}(\mathbf{x}, \circ) + i u_{\gamma_{\circ}}(\mathbf{x}, \circ), & v_{\circ}(\mathbf{x}, \circ) &= v_{\gamma_{\circ}}(\mathbf{x}, \circ) + i v_{\gamma_{\circ}}(\mathbf{x}, \circ), \\
 h(\mathbf{x}, t) &= h_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i h_{\gamma}(\mathbf{x}, t), & \tilde{h}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{h}_{\gamma}(\mathbf{x}, t) + i \tilde{h}_{\gamma}(\mathbf{x}, t),
 \end{aligned} \quad (12.4)$$

که در آن‌ها u_ℓ, v_ℓ, h_ℓ و \tilde{h}_ℓ برای $\ell = 1, 2$ توابع حقیقی می‌باشند. با جایگذاری معادله (۱۱.۴) در دستگاه (۱۰.۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} -m_{\alpha,\beta}^{n+1} b_\alpha u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta \xi \Delta u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_\gamma(\mathbf{x}) u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) &= m_{\alpha,\beta}^{n+1} a_\alpha^{n+1} u_\gamma^\circ(\mathbf{x}) \\ &- \xi(\lambda - \theta) \Delta u_\gamma^n(\mathbf{x}) - (\lambda - \theta) w_\gamma(\mathbf{x}) u_\gamma^n(\mathbf{x}) - \sigma G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) \\ &+ m_{\alpha,\beta}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\alpha j} u_\gamma^{n-j}(\mathbf{x}) + f_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\alpha,\beta}^{n+1} b_\alpha u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta \xi \Delta u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_\gamma(\mathbf{x}) u_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) &= -m_{\alpha,\beta}^{n+1} a_\alpha^{n+1} u_\gamma^\circ(\mathbf{x}) \\ &- \xi(\lambda - \theta) \Delta u_\gamma^n(\mathbf{x}) - \sigma G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) - (\lambda - \theta) w_\gamma(\mathbf{x}) u_\gamma^n(\mathbf{x}) \\ &- m_{\alpha,\beta}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\alpha j} u_\gamma^{n-j}(\mathbf{x}) + f_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -m_{\mu,\nu}^{n+1} b_\mu v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta \xi \Delta v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_\gamma(\mathbf{x}) v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) &= m_{\mu,\nu}^{n+1} a_\mu^{n+1} v_\gamma^\circ(\mathbf{x}) \\ &- \xi(\lambda - \theta) \Delta v_\gamma^n(\mathbf{x}) - \sigma G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) - (\lambda - \theta) w_\gamma(\mathbf{x}) v_\gamma^n(\mathbf{x}) \\ &+ m_{\mu,\nu}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\mu j} v_\gamma^{n-j}(\mathbf{x}) + g_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\mu,\nu}^{n+1} b_\mu v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta \xi \Delta v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) + \theta w_\gamma(\mathbf{x}) v_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}) &= -m_{\mu,\nu}^{n+1} a_\mu^{n+1} v_\gamma^\circ(\mathbf{x}) \\ &- \xi(\lambda - \theta) \Delta v_\gamma^n(\mathbf{x}) - \sigma_\gamma G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) - (\lambda - \theta) w_\gamma(\mathbf{x}) v_\gamma^n(\mathbf{x}) \\ &- m_{\mu,\nu}^{n+1} \sum_{j=1}^n c_{\mu j} v_\gamma^{n-j}(\mathbf{x}) + g_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (13.4)$$

که در آن‌ها

$$G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) = (u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma) u_\gamma^n(\mathbf{x}),$$

$$G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) = (u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma) u_\gamma^n(\mathbf{x}),$$

$$G_\gamma(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) = (u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + u_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma + v_\gamma^n(\mathbf{x})^\gamma) v_\gamma^n(\mathbf{x}),$$

$$G_{\Psi}(u^n(\mathbf{x}), v^n(\mathbf{x})) = (u_1^n(\mathbf{x})^2 + u_2^n(\mathbf{x})^2 + v_1^n(\mathbf{x})^2 + v_2^n(\mathbf{x})^2) v_2^n(\mathbf{x}).$$

بنابراین، فرمول بازگشتی برای مساله تحت مطالعه به دست می‌آید.

۳.۴. تقریب توابع توسط موجک لژاندر دوبعدی

توابع $u_{\ell}^n(\mathbf{x})$ و $v_{\ell}^n(\mathbf{x})$ برای $\ell = 1, 2$ را می‌توانیم توسط توابع پایه‌ای موجک لژاندر دوبعدی به صورت‌های زیر تقریب بزنیم

$$u_{\ell}^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^{NN'} \lambda_{\ell l}^n \psi_l(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})^T [\Lambda_{\ell}]^n, \quad v_{\ell}^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^{N\bar{N}} \gamma_{\ell l}^n \psi_l(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})^T [\Gamma_{\ell}]^n, \quad (14.4)$$

که در آن‌ها $\lambda_{\ell l}^n = \hat{\lambda}_{\ell ij}^n$ و $\gamma_{\ell l}^n = \hat{\gamma}_{\ell ij}^n$ برای $\ell = 1, 2$ بوده و $\psi_l(\mathbf{x}) = \hat{\psi}_{ij}(\mathbf{x})$. به منظور محاسبه ضرایب مجهول $\lambda_{\ell l}^n$ و $\gamma_{\ell l}^n$ ، توابع $u_{\ell}^n(\mathbf{x})$ و $v_{\ell}^n(\mathbf{x})$ برای $\ell = 1, 2$ در نقاط هم محلی $\mathbf{x}_{ij} = (x_i, y_j)$ به صورت زیر ارزیابی می‌کنیم

$$\begin{aligned} u_{\ell}^n(\mathbf{x}_{ij}) &\approx \sum_{l=1}^{NN'} \lambda_{\ell l}^n \psi_l(\mathbf{x}_{ij}) = \Psi(\mathbf{x}_{ij})^T [\Lambda_{\ell}]^n, \\ v_{\ell}^n(\mathbf{x}_{ij}) &\approx \sum_{l=1}^{N\bar{N}} \gamma_{\ell l}^n \psi_l(\mathbf{x}_{ij}) = \Psi(\mathbf{x}_{ij})^T [\Gamma_{\ell}]^n. \end{aligned} \quad (15.4)$$

حال بردارهای $[\mathbf{u}_{\ell}]^n$ ، $[\mathbf{v}_{\ell}]^n$ ، $[\Lambda_{\ell}]^n$ و $[\Gamma_{\ell}]^n$ برای $\ell = 1, 2$ را نیز به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{\ell}]^n &= [u_{\ell 1}^n \ u_{\ell 2}^n \ \dots \ u_{\ell NN'}^n]^T, & [\mathbf{v}_{\ell}]^n &= [v_{\ell 1}^n \ v_{\ell 2}^n \ \dots \ v_{\ell N\bar{N}}^n]^T, \\ [\Lambda_{\ell}]^n &= [\lambda_{\ell 1}^n \ \lambda_{\ell 2}^n \ \dots \ \lambda_{\ell NN'}^n]^T, & [\Gamma_{\ell}]^n &= [\gamma_{\ell 1}^n \ \gamma_{\ell 2}^n \ \dots \ \gamma_{\ell N\bar{N}}^n]^T. \end{aligned} \quad (16.4)$$

در ضمن، ماتریس \mathbf{A} با بعد $NN' \times N\bar{N}$ را به صورت

$$(17.4)$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = [\Psi(\mathbf{x}_{11}) \ \dots \ \Psi(\mathbf{x}_{1N'}) \ \Psi(\mathbf{x}_{21}) \ \dots \ \Psi(\mathbf{x}_{2N'}) \ \dots \ \Psi(\mathbf{x}_{NN'-1}) \ \Psi(\mathbf{x}_{NN'})]^T,$$

۱۳۶ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲
 معرفی می‌کنیم. طبق معادله‌های (۱۶.۴) و (۱۷.۴) معادله (۱۵.۴) را به صورت ماتریسی زیر نمایش
 می‌دهیم

$$[\mathbf{u}_\ell]^n = \mathbf{A}[\Lambda_\ell]^n, \quad [\mathbf{v}_\ell]^n = \mathbf{A}[\Gamma_\ell]^n, \quad \ell = 1, 2. \quad (18.4)$$

ماتریس \mathbf{A} را می‌توانیم به فرم $\mathbf{A} = \mathbf{A}_d + \mathbf{A}_b$ تجزیه کنیم که در آن

$$\mathbf{A}_d = [a_{dij}] = \begin{cases} a_{ij}, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \mathbf{A}_b = [a_{bij}] = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ a_{ij}, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (19.4)$$

توابع مشتق $u_{\ell xx}^n(\mathbf{x})$ و $v_{\ell yy}^n(\mathbf{x})$ برای $\ell = 1, 2$ را هم با استفاده از معادلات (۷.۳) و (۸.۳) می‌توانیم
 به صورت‌های زیر نمایش دهیم

$$\begin{aligned} u_{\ell xx}^n(\mathbf{x}) &= \Psi(\mathbf{x})^T (\mathbf{D}_x^{(2)})^T [\Lambda_\ell]^n, \\ v_{\ell yy}^n(\mathbf{x}) &= \Psi(\mathbf{x})^T (\mathbf{D}_y^{(2)})^T [\Gamma_\ell]^n, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (20.4)$$

در مرحله آخر، با جایگذاری معادله‌های (۱۸.۴) و (۲۰.۴) در معادله‌های (۱۳.۴) برای نقاط درونی و
 اعمال شرایط کرانه‌ای بیان شده در معادله (۱۲.۴)، دستگاهی از روابط بازگشتی

$$\left\{ \begin{aligned}
 \mathbf{B}_\lambda[\Lambda_\gamma]^{n+1} + \mathbf{B}_\gamma[\Lambda_\lambda]^{n+1} &= \mathbf{S}_\lambda[\Lambda_\gamma]^\circ + \mathbf{E}_\lambda[\Lambda_\lambda]^n - \sigma \mathbf{G}_\lambda([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) \\
 &\quad + [\mathbf{R}_\lambda]^{n-1} + [\mathbf{F}_\lambda]^{n+1} + [\mathbf{H}_\lambda]^{n+1}, \\
 \mathbf{B}_\gamma[\Lambda_\gamma]^{n+1} + \mathbf{B}_\lambda[\Lambda_\gamma]^{n+1} &= \mathbf{S}_\gamma[\Lambda_\lambda]^\circ + \mathbf{E}_\gamma[\Lambda_\gamma]^n - \sigma \mathbf{G}_\gamma([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) \\
 &\quad + [\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} + [\mathbf{F}_\gamma]^{n+1} + [\mathbf{H}_\gamma]^{n+1}, \\
 \mathbf{B}_\Delta[\Gamma_\gamma]^{n+1} + \mathbf{B}_\gamma[\Gamma_\Delta]^{n+1} &= \mathbf{S}_\gamma[\Gamma_\gamma]^\circ + \mathbf{E}_\gamma[\Lambda_\lambda]^n - \sigma \mathbf{G}_\gamma([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) \\
 &\quad + [\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} + [\mathbf{G}'_\gamma]^{n+1} + [\tilde{\mathbf{H}}_\lambda]^{n+1}, \\
 \mathbf{B}_\gamma[\Gamma_\gamma]^{n+1} + \mathbf{B}_\Delta[\Gamma_\gamma]^{n+1} &= \mathbf{S}_\gamma[\Gamma_\lambda]^\circ + \mathbf{E}_\gamma[\Gamma_\gamma]^n - \sigma \mathbf{G}_\gamma([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) \\
 &\quad + [\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} + [\mathbf{G}'_\gamma]^{n+1} + [\tilde{\mathbf{H}}_\gamma]^{n+1},
 \end{aligned} \right. \quad (21.4)$$

را به دست می‌آوریم که در آن‌ها

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_\lambda &= -\mathbf{B}_\gamma = -b_\alpha [\mathbf{m}_{\alpha,\beta}]^{n+1} * \mathbf{A}_d, \\
 \mathbf{B}_\gamma &= \mathbf{B}_\gamma = \theta \xi \mathbf{A}_d \left((\mathbf{D}_x^{(\gamma)})^T + (\mathbf{D}_y^{(\gamma)})^T \right) + \theta \xi \mathbf{w}_\lambda * \mathbf{A}_d + \mathbf{A}_b, \\
 \mathbf{B}_\Delta &= -\mathbf{B}_\lambda = -b_\mu [\mathbf{m}_{\mu,\nu}]^{n+1} * \mathbf{A}_d, \\
 \mathbf{B}_\gamma &= \mathbf{B}_\gamma = \theta \xi \mathbf{A}_d \left((\mathbf{D}_x^{(\gamma)})^T + (\mathbf{D}_y^{(\gamma)})^T \right) + \theta \xi \mathbf{w}_\gamma * \mathbf{A}_d + \mathbf{A}_b, \\
 \mathbf{S}_\lambda &= -\mathbf{S}_\gamma = -[\mathbf{m}_{\alpha,\beta}]^{n+1} * [\mathbf{a}_\alpha]^{n+1} * \mathbf{A}_d, \\
 \mathbf{S}_\gamma &= -\mathbf{S}_\gamma = [\mathbf{m}_{\mu,\nu}]^{n+1} * [\mathbf{a}_\mu]^{n+1} * \mathbf{A}_d, \\
 \mathbf{E}_\lambda &= \mathbf{E}_\gamma = -\xi(\lambda - \theta) \mathbf{A}_d \left((\mathbf{D}_x^{(\gamma)})^T + (\mathbf{D}_y^{(\gamma)})^T \right) - \xi(\lambda - \theta) \mathbf{w}_\lambda * \mathbf{A}_d, \\
 \mathbf{E}_\gamma &= \mathbf{E}_\gamma = -\xi(\lambda - \theta) \mathbf{A}_d \left((\mathbf{D}_x^{(\gamma)})^T + (\mathbf{D}_y^{(\gamma)})^T \right) - \xi(\lambda - \theta) \mathbf{w}_\gamma * \mathbf{A}_d, \\
 [\mathbf{R}_\lambda]^{n-1} &= [\mathbf{m}_{\alpha,\beta}]^{n+1} * \sum_{j=1}^n [\mathbf{c}_{\alpha j}] * \mathbf{u}_\gamma^{n-j},
 \end{aligned}$$

$$[\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} = -[\mathbf{m}_{\alpha,\beta}]^{n+1} * \sum_{j=1}^n [\mathbf{c}_{\alpha j}] * \mathbf{u}_\gamma^{n-j},$$

$$[\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} = [\mathbf{m}_{\mu,\nu}]^{n+1} * \sum_{j=1}^n [\mathbf{c}_{\mu j}] * \mathbf{v}_\gamma^{n-j},$$

$$[\mathbf{R}_\gamma]^{n-1} = -[\mathbf{m}_{\mu,\nu}]^{n+1} * \sum_{j=1}^n [\mathbf{c}_{\mu j}] * \mathbf{v}_\gamma^{n-j}.$$

بردارهای ستونی با بعد NN' به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$[\mathbf{w}_\gamma] = \begin{cases} w_\gamma(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad [\mathbf{w}_\gamma] = \begin{cases} w_\gamma(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\mathbf{F}_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} f_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad [\mathbf{F}_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} f_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\mathbf{G}'_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} g_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad [\mathbf{G}'_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} g_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_\lambda([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) = \begin{cases} G_\lambda([\mathbf{u}]^n, [\mathbf{v}]^n), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_\gamma([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) = \begin{cases} G_\gamma([\mathbf{u}]^n, [\mathbf{v}]^n), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_\psi([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) = \begin{cases} G_\psi([\mathbf{u}]^n, [\mathbf{v}]^n), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_\varphi([\mathbf{u}_d]^n, [\mathbf{v}_d]^n) = \begin{cases} G_\varphi([\mathbf{u}]^n, [\mathbf{v}]^n), & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\mathbf{H}_\lambda]^{n+1} = \begin{cases} \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ h_\lambda^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\mathbf{H}_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ h_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\tilde{\mathbf{H}}_\lambda]^{n+1} = \begin{cases} \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \tilde{h}_\lambda^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$[\tilde{\mathbf{H}}_\gamma]^{n+1} = \begin{cases} \circ, & \mathbf{x}_{ij} \in \Omega, \\ \tilde{h}_\gamma^{n+1}(\mathbf{x}_{ij}), & \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

۱۴۰ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲

به آسانی می‌توانیم مقادیر $[\mathbf{u}_l]^{n+1}$ و $[\mathbf{v}_l]^{n+1}$ برای $l = 1, 2$ و $n = 0, 1, \dots, N' - 1$ را مطابق با دستگاه (۲۱.۴) به دست آوریم. در دستگاه (۲۱.۴)، در اولین گام زمانی یعنی $n = 0$ داریم

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1[\Lambda_2]^1 + \mathbf{B}_2[\Lambda_1]^1 = \mathbf{S}_1[\Lambda_2]^0 + \mathbf{E}_1[\Lambda_1]^0 - \sigma \mathbf{G}_1([\mathbf{u}_d]^0, [\mathbf{v}_d]^0) \\ \quad + [\mathbf{F}_1]^1 + [\mathbf{H}_1]^1, \\ \mathbf{B}_3[\Lambda_2]^1 + \mathbf{B}_4[\Lambda_1]^1 = \mathbf{S}_2[\Lambda_1]^0 + \mathbf{E}_2[\Lambda_2]^0 - \sigma \mathbf{G}_2([\mathbf{u}_d]^0, [\mathbf{v}_d]^0) \\ \quad + [\mathbf{F}_2]^1 + [\mathbf{H}_2]^1, \\ \mathbf{B}_5[\Gamma_2]^1 + \mathbf{B}_6[\Gamma_1]^1 = \mathbf{S}_3[\Gamma_2]^0 + \mathbf{E}_3[\Gamma_1]^0 - \sigma \mathbf{G}_3([\mathbf{u}_d]^0, [\mathbf{v}_d]^0) \\ \quad + [\mathbf{G}'_1]^1 + [\tilde{\mathbf{H}}_1]^1, \\ \mathbf{B}_7[\Gamma_2]^1 + \mathbf{B}_8[\Gamma_1]^1 = \mathbf{S}_4[\Gamma_1]^0 + \mathbf{E}_4[\Gamma_2]^0 - \sigma \mathbf{G}_4([\mathbf{u}_d]^0, [\mathbf{v}_d]^0) \\ \quad + [\mathbf{G}'_2]^1 + [\tilde{\mathbf{H}}_2]^1, \end{array} \right. \quad (22.4)$$

برای محاسبه مقادیر $[\Lambda_\ell]^1$ و $[\Gamma_\ell]^1$ برای $\ell = 1, 2$ ، ابتدا مقادیر $[\Lambda_\ell]^0$ و $[\Gamma_\ell]^0$ برای $\ell = 1, 2$ را به صورت

$$[\mathbf{u}_\ell]^0 = [u_{\ell_0}(\mathbf{x}_{\ell_1}) \quad u_{\ell_0}(\mathbf{x}_{\ell_2}) \quad \dots \quad u_{\ell_0}(\mathbf{x}_{NN'})]^T, \quad [\Lambda_\ell]^0 = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{u}_\ell]^0,$$

و

$$[\mathbf{v}_\ell]^0 = [v_{\ell_0}(\mathbf{x}_{11}) \quad v_{\ell_0}(\mathbf{x}_{12}) \quad \dots \quad v_{\ell_0}(\mathbf{x}_{NN'})]^T, \quad [\Gamma_\ell]^0 = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{v}_\ell]^0,$$

به دست آورده و در دستگاه (۲۲.۴) جایگذاری کرده و مقادیر مورد نظر را محاسبه می‌کنیم. در دستگاه (۲۱.۴) با وجود اینکه به ازای هر $\theta \in [0, 1]$ صحیح می‌باشد، $\theta = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم و بنابراین از روش کرانک- نیکلسون استفاده می‌نماییم.

۵. مثال‌های عددی

در این بخش، نتایج عددی روش پیشنهادی را برای دو مثال ارائه می‌دهیم. دقت نتایج برحسب نرم بی‌نهایت به صورت‌های زیر محاسبه می‌شود

$$L_{\infty}^{real} = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq j \leq N'} |u_1(\mathbf{x}_{ij}) - \tilde{u}_1(\mathbf{x}_{ij})|,$$

$$L_{\infty}^{image} = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq j \leq N'} |u_2(\mathbf{x}_{ij}) - \tilde{u}_2(\mathbf{x}_{ij})|,$$

$$L_{\infty}^* = \sqrt{(L_{\infty}^{real})^2 + (L_{\infty}^{image})^2},$$

که در آن‌ها $u_{\ell}(\mathbf{x}_{ij})$ و $\tilde{u}_{\ell}(\mathbf{x}_{ij})$ برای $\ell = 1, 2$ به ترتیب مقادیر جواب‌های تحلیلی و عددی در نقاط هم محلی \mathbf{x}_{ij} می‌باشند. هم‌چنین، به منظور شبیه‌سازی‌های عددی از 3° جمله اول سری تابع میتاگ- لفلر استفاده کرده‌ایم. به‌علاوه، مرتبه همگرایی روش پیشنهادی را توسط

$$C - order = \frac{\log\left(\frac{L_{\infty}(\delta t_2)}{L_{\infty}(\delta t_1)}\right)}{\log\left(\frac{\delta t_2}{\delta t_1}\right)},$$

محاسبه می‌نماییم و اندازه مرتبه همگرایی را با استفاده از رابطه زیر گزارش می‌کنیم

$$C^* - order = \frac{\log\left(\frac{L_{\infty}^*(\delta t_2)}{L_{\infty}^*(\delta t_1)}\right)}{\log\left(\frac{\delta t_2}{\delta t_1}\right)}.$$

قابل ذکر است که در تمامی مثال‌ها فرض بر این است که $(k, M) = (k', M')$ و در نتیجه $N = N'$ و هم‌چنین از نقاط گاوس- لژاندر انتقال یافته به عنوان نقاط هم محلی استفاده می‌نماییم.

۱۴۲ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی / موجک‌ها و جبرخطی (۳) (۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲
 مثال ۱.۵. به عنوان اولین مثال، دستگاهی از معادلات شرودینگر غیرخطی کسری- فراکتال زمانی

$$i {}_0^{\text{FFM}} \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} u(\mathbf{x}, t) + \Delta u(\mathbf{x}, t) + (|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2) u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t),$$

$$i {}_0^{\text{FFM}} \longrightarrow D_t^{\mu, \nu} v(\mathbf{x}, t) + \Delta v(\mathbf{x}, t) + (|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2) v(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t),$$

را بررسی می‌کنیم که در آن

$$f(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathbf{AB}(\alpha) \Upsilon! t^{\delta-\beta}}{\beta(\gamma-\alpha)} \mathbf{E}_{\alpha, \delta} \left(\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha} t^\alpha \right) \cos(x) \cos(y) - \Upsilon t^\Upsilon \sin(x) \sin(y)$$

$$+ t^\lambda \left[(\sin^\Upsilon(x) \sin^\Upsilon(y) + \cos^\Upsilon(x) \cos^\Upsilon(y)) (t^\Upsilon + 1) \right] \sin(x) \sin(y)$$

$$+ i \left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha) \Upsilon! t^{\delta-\beta}}{\beta(\gamma-\alpha)} \mathbf{E}_{\alpha, \delta} \left(\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha} t^\alpha \right) \sin(x) \sin(y) - \Upsilon t^\Upsilon \cos(x) \cos(y) \right)$$

$$+ t^\lambda \left[(\sin^\Upsilon(x) \sin^\Upsilon(y) + \cos^\Upsilon(x) \cos^\Upsilon(y)) (t^\Upsilon + 1) \right] \cos(x) \cos(y),$$

و

$$g(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathbf{AB}(\alpha) \Upsilon! t^{\Upsilon-\beta}}{\beta(\gamma-\alpha)} \mathbf{E}_{\alpha, \Upsilon} \left(\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha} t^\alpha \right) \sin(x) \sin(y) - \Upsilon t^\Upsilon \cos(x) \cos(y)$$

$$+ t^\lambda \left[(\sin^\Upsilon(x) \sin^\Upsilon(y) + \cos^\Upsilon(x) \cos^\Upsilon(y)) (t^\Upsilon + 1) \right] \cos(x) \cos(y)$$

$$+ i \left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha) \Upsilon! t^{\Upsilon-\beta}}{\beta(\gamma-\alpha)} \mathbf{E}_{\alpha, \Upsilon} \left(\frac{-\alpha}{\gamma-\alpha} t^\alpha \right) \cos(x) \cos(y) - \Upsilon t^\Upsilon \sin(x) \sin(y) \right)$$

$$+ t^\lambda \left[(\sin^\Upsilon(x) \sin^\Upsilon(y) + \cos^\Upsilon(x) \cos^\Upsilon(y)) (t^\Upsilon + 1) \right] \sin(x) \sin(y).$$

شرایط اولیه و کرانه‌ای را نیز می‌توانیم از جواب تحلیلی

$$u(\mathbf{x}, t) = t^\Upsilon (\sin(x) \sin(y) + i \cos(x) \cos(y)),$$

$$v(\mathbf{x}, t) = t^\Upsilon (\cos(x) \cos(y) + i \sin(x) \sin(y)),$$

۱۴۳ حسینی‌نیا، حیدری، مالک قایینی/ موجک‌ها و جبرخطی (۳) ۱۴۰۰) ۱۱۹-۱۵۲

استخراج نماییم. این سیستم را با به کار بردن روش پیشنهادی با $(k = 0, M = 8)$ برای $N = 8$ سه مقدار متفاوت طول گام زمانی δt حل می‌کنیم. جداول ۱-۴، نتایج عددی مرتبط با روش پیشنهادی را ارائه می‌دهند، که بیانگر دقت بالای روش به‌کار گرفته شده در حل این مثال می‌باشد. شکل‌های ۱-۴، نمودارهای جواب‌های تقریبی و تابع‌های خطای مطلق برای قسمت‌های حقیقی و موهومی $u(\mathbf{x}, t)$ و $v(\mathbf{x}, t)$ را برای $(\alpha = 0/8, \beta = 0/5)$ ، $(\mu = 0/6, \nu = 0/9)$ و $\delta t = 0/0025$ نشان می‌دهند.

t	$\delta t = 0/01$			$\delta t = 0/005$			$\delta t = 0/0025$		
	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*
0/2	$4/7122 \times 10^{-6}$	$1/7525 \times 10^{-5}$	$1/8157 \times 10^{-5}$	$2/3469 \times 10^{-6}$	$8/7778 \times 10^{-6}$	$9/0861 \times 10^{-6}$	$1/1694 \times 10^{-6}$	$4/3907 \times 10^{-6}$	$4/5438 \times 10^{-6}$
0/4	$3/8095 \times 10^{-4}$	$1/4018 \times 10^{-4}$	$4/0592 \times 10^{-4}$	$1/8983 \times 10^{-5}$	$7/0117 \times 10^{-5}$	$7/2641 \times 10^{-5}$	$9/4682 \times 10^{-6}$	$3/5065 \times 10^{-4}$	$3/5078 \times 10^{-4}$
0/6	$1/2545 \times 10^{-4}$	$4/5778 \times 10^{-4}$	$4/7466 \times 10^{-4}$	$6/2487 \times 10^{-5}$	$2/2895 \times 10^{-4}$	$2/3732 \times 10^{-4}$	$3/1167 \times 10^{-5}$	$1/1449 \times 10^{-4}$	$1/8666 \times 10^{-4}$
0/8	$2/0902 \times 10^{-4}$	$7/4099 \times 10^{-4}$	$7/6991 \times 10^{-4}$	$1/0313 \times 10^{-4}$	$3/7041 \times 10^{-4}$	$3/8450 \times 10^{-4}$	$5/1192 \times 10^{-5}$	$1/8521 \times 10^{-4}$	$1/9215 \times 10^{-4}$
1/0	$6/2571 \times 10^{-4}$	$2/6309 \times 10^{-3}$	$2/7043 \times 10^{-3}$	$3/2653 \times 10^{-4}$	$1/3289 \times 10^{-3}$	$1/3684 \times 10^{-3}$	$1/6680 \times 10^{-4}$	$6/6770 \times 10^{-4}$	$6/8822 \times 10^{-4}$

جدول ۱: مقادیر خطاهای به‌دست آمده روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $u(\mathbf{x}, t)$ برای بعضی مقادیر δt در مثال ۱.۵.

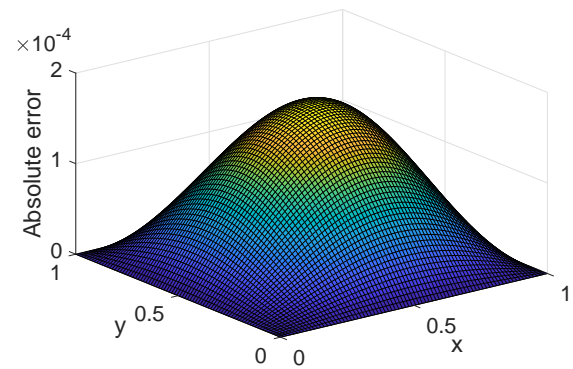
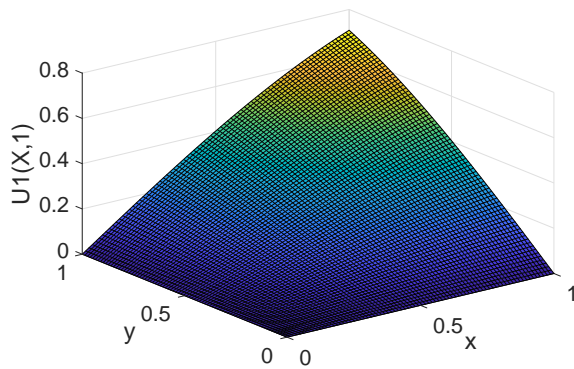
δt	L_{∞}^{real}	C - order	L_{∞}^{image}	C - order	L_{∞}^*	C* - order
1/10	$2/3181 \times 10^{-3}$	-	$1/9789 \times 10^{-2}$	-	$1/9924 \times 10^{-2}$	-
1/100	$6/2571 \times 10^{-4}$	0/5688	$2/6309 \times 10^{-3}$	0/8763	$2/7043 \times 10^{-3}$	0/8673
1/200	$3/2653 \times 10^{-4}$	0/9383	$1/3289 \times 10^{-3}$	0/9853	$1/3840 \times 10^{-3}$	0/9828
1/400	$1/6680 \times 10^{-4}$	0/9691	$6/6770 \times 10^{-4}$	0/9930	$6/8822 \times 10^{-4}$	0/9915

جدول ۲: نرم بی‌نهایت خطا و مرتبه همگرایی روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $u(\mathbf{x}, t)$ برای بعضی مقادیر مختلف δt در زمان نهایی $t = 1$ در مثال ۱.۵.

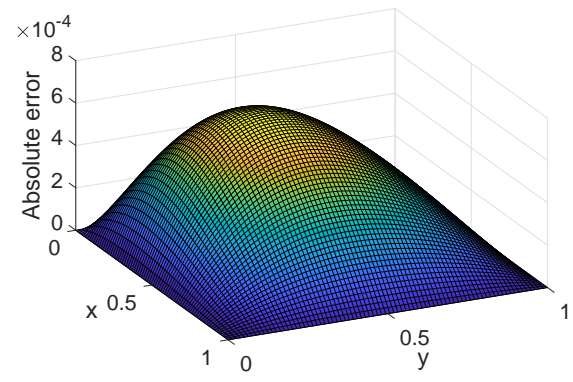
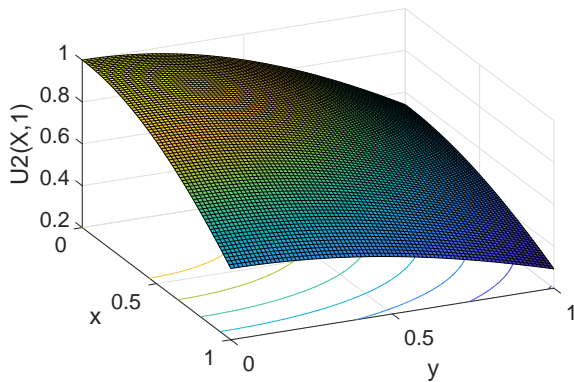
t	$\delta t = 0/01$			$\delta t = 0/005$			$\delta t = 0/0025$		
	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*
0/2	$6/3487 \times 10^{-5}$	$2/5636 \times 10^{-5}$	$6/8468 \times 10^{-5}$	$3/1748 \times 10^{-5}$	$1/2870 \times 10^{-5}$	$3/4257 \times 10^{-5}$	$1/5872 \times 10^{-5}$	$6/4483 \times 10^{-6}$	$1/1722 \times 10^{-5}$
0/4	$2/5246 \times 10^{-4}$	$1/0114 \times 10^{-4}$	$2/7197 \times 10^{-4}$	$1/2692 \times 10^{-4}$	$5/0667 \times 10^{-4}$	$1/3666 \times 10^{-4}$	$6/3096 \times 10^{-5}$	$2/5368 \times 10^{-4}$	$6/8005 \times 10^{-4}$
0/6	$5/2016 \times 10^{-4}$	$2/0691 \times 10^{-4}$	$5/5954 \times 10^{-4}$	$2/6000 \times 10^{-4}$	$1/0363 \times 10^{-3}$	$2/7989 \times 10^{-4}$	$1/2998 \times 10^{-4}$	$5/1871 \times 10^{-4}$	$1/3993 \times 10^{-4}$
0/8	$4/8571 \times 10^{-4}$	$1/8606 \times 10^{-4}$	$5/2013 \times 10^{-4}$	$2/4229 \times 10^{-4}$	$9/3055 \times 10^{-4}$	$2/5955 \times 10^{-4}$	$1/2101 \times 10^{-4}$	$4/6558 \times 10^{-4}$	$1/2966 \times 10^{-4}$
1/0	$1/8870 \times 10^{-4}$	$7/6015 \times 10^{-4}$	$2/0343 \times 10^{-3}$	$9/5156 \times 10^{-4}$	$3/8352 \times 10^{-3}$	$1/0259 \times 10^{-3}$	$4/7777 \times 10^{-4}$	$1/9259 \times 10^{-4}$	$5/1513 \times 10^{-4}$

جدول ۳: مقادیر خطاهای به‌دست آمده روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $v(\mathbf{x}, t)$ برای بعضی مقادیر δt در مثال ۱.۵.

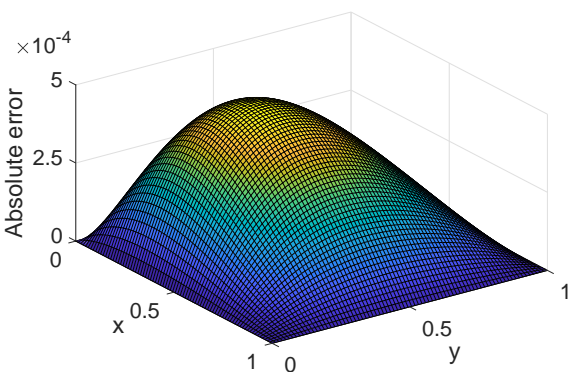
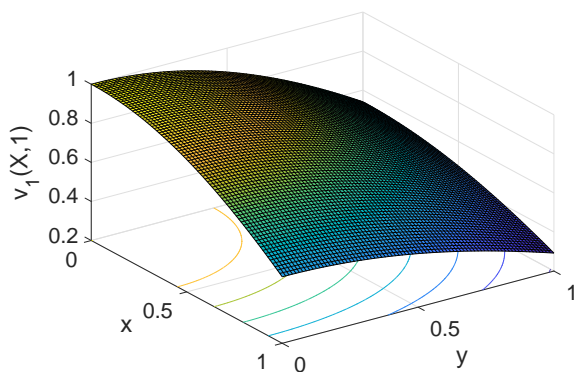
مثال ۲.۵. در آخرین مثال، به بررسی دستگاه معادلات شرودینگر غیرخطی کسری- فراکتال زمانی



شکل ۱: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت حقیقی تابع $u(x,t)$ که در آن $(\alpha = 0.8, \beta = 0.5)$ ، $(\mu = 0.6, \nu = 0.9)$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 1$ در مثال ۱.۵.



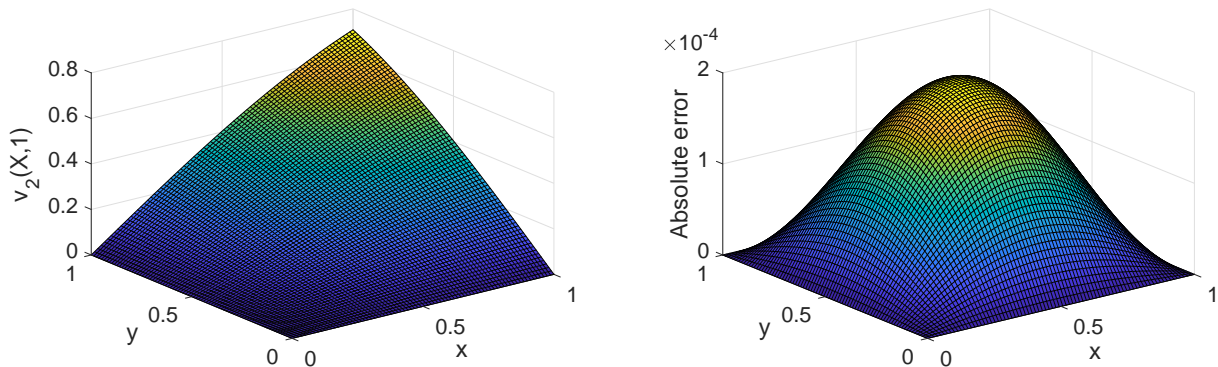
شکل ۲: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت موهومی تابع $u(x,t)$ که در آن $(\alpha = 0.8, \beta = 0.5)$ ، $(\mu = 0.6, \nu = 0.9)$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 1$ در مثال ۱.۵.



شکل ۳: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت حقیقی تابع $v(x,t)$ که در آن $(\alpha = 0.8, \beta = 0.5)$ ، $(\mu = 0.6, \nu = 0.9)$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 1$ در مثال ۱.۵.

δt	L_{∞}^{real}	$C - order$	L_{∞}^{image}	$C - order$	L_{∞}^*	$C^* - order$
۱/۱۰	$1/5401 \times 10^{-2}$	-	$6/2117 \times 10^{-3}$	-	$1/6607 \times 10^{-2}$	-
۱/۱۰۰	$1/8870 \times 10^{-3}$	۰/۹۱۱۸	$7/6015 \times 10^{-4}$	۰/۹۱۲۳	$2/0344 \times 10^{-3}$	۰/۹۱۱۹
۱/۲۰۰	$9/5156 \times 10^{-4}$	۰/۹۸۷۷	$3/8352 \times 10^{-4}$	۰/۹۸۷۰	$1/0259 \times 10^{-3}$	۰/۹۸۷۷
۱/۴۰۰	$4/7777 \times 10^{-4}$	۰/۹۹۴۰	$1/9295 \times 10^{-4}$	۰/۹۹۳۸	$5/1513 \times 10^{-4}$	۰/۹۹۳۹

جدول ۴: نرم بی‌نهایت خطا و مرتبه همگرایی روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $v(\mathbf{x}, t)$ برای مقادیر مختلف δt در زمان نهایی $t = 1$ در مثال ۱.۵.



شکل ۴: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت موهومی تابع $v(\mathbf{x}, t)$ که در آن $(\alpha = 0/8, \beta = 0/5)$ ، $(\mu = 0/6, \nu = 0/9)$ و $\delta t = 0/0025$ در زمان نهایی $T = 1$ در مثال ۱.۵.

$$i_{\circ}^{FFM} \longrightarrow D_t^{\alpha, \beta} u(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\gamma} \Delta u(\mathbf{x}, t) + \gamma (|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2) u(\mathbf{x}, t) + (1 - \gamma \sin^2(x) \sin^2(y)) u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t),$$

$$i_{\circ}^{FFM} D_t^{\mu, \nu} v(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\gamma} \Delta v(\mathbf{x}, t) + \gamma (|u(\mathbf{x}, t)|^2 + |v(\mathbf{x}, t)|^2) v(\mathbf{x}, t) + (1 - \gamma \cos^2(x) \cos^2(y)) v(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t),$$

می‌پردازیم که در آن

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, t) = & \left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r+1} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+2} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \sin(x) \sin(y) \\
 & + \gamma \cos^\gamma(x) \cos^\gamma(y) \sin(x) \sin(y) \cos(t) \\
 & + i \left(\left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \sin(x) \sin(y) \right. \\
 & \left. - \gamma \cos^\gamma(x) \cos^\gamma(y) \sin(x) \sin(y) \sin(t) \right),
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}, t) = & \left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r+1} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+2} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \cos(x) \cos(y) \\
 & + \gamma \sin^\gamma(x) \sin^\gamma(y) \cos(x) \cos(y) \cos(t) \\
 & + i \left(\left(\frac{\mathbf{AB}(\alpha)t^{1-\beta}}{\beta(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r t^{\gamma r} \mathbf{E}_{\alpha, \gamma r+1} \left(\frac{-\alpha t^\alpha}{1-\alpha} \right) \right) \cos(x) \cos(y) \right. \\
 & \left. - \gamma \sin^\gamma(x) \sin^\gamma(y) \cos(x) \cos(y) \sin(t) \right).
 \end{aligned}$$

شرایط اولیه و کرانه‌ای را می‌توانیم از جواب تحلیلی

$$u(\mathbf{x}, t) = \sin(x) \sin(y) \exp(-it), \quad v(\mathbf{x}, t) = \cos(x) \cos(y) \exp(-it),$$

استخراج کنیم. روش پیشنهادی برای این دستگاه با $N = 8$ ($k = 1, M = 4$) استفاده شده است. جدول‌های ۵ و ۷ نرم‌بی‌نهایت خطاها در زمان‌های متفاوت t برای قسمت‌های حقیقی و موهومی $u(\mathbf{x}, t)$ و $v(\mathbf{x}, t)$ که در آن $(\alpha = 0/5, \beta = 0/5)$ و $(\mu = 0/6, \nu = 0/9)$ را برای سه مقدار طول گام زمانی δt گزارش می‌کنند. جدول‌های ۶ و ۸ مرتبه همگرایی در زمان نهایی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی $u(\mathbf{x}, t)$ و $v(\mathbf{x}, t)$ با چهار انتخاب δt را ارایه می‌کنند. نمودارهای جواب موجک و تابع خطای مطلق در زمان نهایی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی $u(\mathbf{x}, t)$ و $v(\mathbf{x}, t)$ در شکل‌های ۵-۸ نشان داده شده‌اند.

از نتایج به دست آمده می‌توان مشاهده کرد که روش نیمه گسسته پیشنهادی نتایج عددی با دقت بالا را برای این مثال ارائه می‌کند.

t	$\delta t = 0/01$			$\delta t = 0/005$			$\delta t = 0/0025$		
	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*
0/2	$6/1017 \times 10^{-5}$	$5/5204 \times 10^{-5}$	$8/2283 \times 10^{-5}$	$1/6144 \times 10^{-5}$	$2/5175 \times 10^{-5}$	$2/9907 \times 10^{-5}$	$6/5107 \times 10^{-6}$	$9/7727 \times 10^{-6}$	$1/1742 \times 10^{-5}$
0/4	$4/9681 \times 10^{-5}$	$7/8855 \times 10^{-5}$	$9/3200 \times 10^{-5}$	$1/7854 \times 10^{-5}$	$2/4198 \times 10^{-5}$	$3/0072 \times 10^{-5}$	$8/4485 \times 10^{-6}$	$1/1513 \times 10^{-5}$	$8/5266 \times 10^{-6}$
0/6	$5/5529 \times 10^{-5}$	$3/8149 \times 10^{-5}$	$6/7371 \times 10^{-5}$	$1/7320 \times 10^{-5}$	$2/2872 \times 10^{-5}$	$2/8690 \times 10^{-5}$	$9/1055 \times 10^{-6}$	$1/1958 \times 10^{-5}$	$1/5030 \times 10^{-5}$
0/8	$4/7412 \times 10^{-5}$	$6/222 \times 10^{-5}$	$7/8625 \times 10^{-5}$	$2/2177 \times 10^{-5}$	$1/6245 \times 10^{-5}$	$2/7490 \times 10^{-5}$	$8/0899 \times 10^{-6}$	$1/0392 \times 10^{-5}$	$1/3170 \times 10^{-5}$
1/0	$3/5936 \times 10^{-5}$	$6/4801 \times 10^{-5}$	$7/4098 \times 10^{-5}$	$2/0746 \times 10^{-5}$	$2/1644 \times 10^{-5}$	$2/9981 \times 10^{-5}$	$1/0381 \times 10^{-5}$	$8/5932 \times 10^{-6}$	$1/3476 \times 10^{-5}$
1/2	$4/2528 \times 10^{-5}$	$4/4420 \times 10^{-5}$	$6/1496 \times 10^{-5}$	$1/9069 \times 10^{-5}$	$1/7585 \times 10^{-5}$	$2/5940 \times 10^{-5}$	$1/0777 \times 10^{-5}$	$8/0172 \times 10^{-6}$	$1/3432 \times 10^{-5}$
1/4	$4/7944 \times 10^{-5}$	$1/6531 \times 10^{-5}$	$5/0752 \times 10^{-5}$	$1/9420 \times 10^{-5}$	$1/3547 \times 10^{-5}$	$2/3663 \times 10^{-5}$	$1/1689 \times 10^{-5}$	$6/8618 \times 10^{-6}$	$1/3554 \times 10^{-5}$
1/6	$4/7716 \times 10^{-5}$	$1/6188 \times 10^{-5}$	$5/0381 \times 10^{-5}$	$2/2369 \times 10^{-5}$	$1/4748 \times 10^{-5}$	$2/6793 \times 10^{-5}$	$1/7624 \times 10^{-5}$	$9/5290 \times 10^{-6}$	$2/0035 \times 10^{-5}$
1/8	$4/6105 \times 10^{-5}$	$3/1059 \times 10^{-5}$	$5/5591 \times 10^{-5}$	$1/9743 \times 10^{-5}$	$1/2567 \times 10^{-5}$	$2/3403 \times 10^{-5}$	$1/8033 \times 10^{-5}$	$9/8110 \times 10^{-6}$	$2/0529 \times 10^{-5}$
2/0	$3/6300 \times 10^{-5}$	$2/9924 \times 10^{-5}$	$4/7045 \times 10^{-5}$	$1/9531 \times 10^{-5}$	$1/2544 \times 10^{-5}$	$2/3212 \times 10^{-5}$	$1/4258 \times 10^{-5}$	$2/8310 \times 10^{-6}$	$1/4536 \times 10^{-5}$

جدول ۵: مقادیر خطاهای به دست آمده روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $u(x, t)$ برای بعضی مقادیر δt در مثال ۲.۵.

δt	L_{∞}^{real}	$C - order$	L_{∞}^{image}	$C - order$	L_{∞}^*	$C^* - order$
1/10	$5/2246 \times 10^{-4}$	-	$1/3341 \times 10^{-4}$	-	$5/3922 \times 10^{-4}$	-
1/100	$3/6300 \times 10^{-5}$	1/1581	$2/9925 \times 10^{-5}$	0/6492	$4/7045 \times 10^{-5}$	1/0593
1/200	$1/9531 \times 10^{-5}$	0/8942	$1/2544 \times 10^{-5}$	1/2544	$2/3212 \times 10^{-5}$	1/0192
1/400	$1/4258 \times 10^{-5}$	0/4540	$2/8310 \times 10^{-6}$	2/1476	$1/4536 \times 10^{-5}$	0/6752

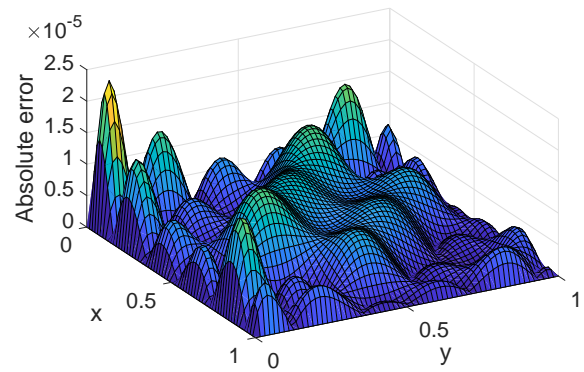
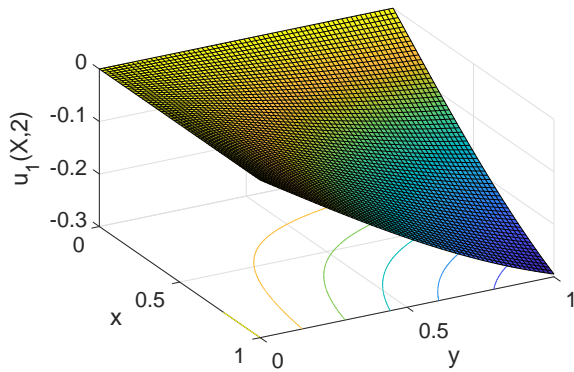
جدول ۶: نرم بی‌نهایت خطا و مرتبه همگرایی روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $u(x, t)$ برای مقادیر مختلف δt در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.

t	$\delta t = 0/01$			$\delta t = 0/005$			$\delta t = 0/0025$		
	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*	L_{∞}^{real}	L_{∞}^{image}	L_{∞}^*
0/2	$2/0662 \times 10^{-4}$	$1/1467 \times 10^{-3}$	$1/1652 \times 10^{-3}$	$7/0460 \times 10^{-5}$	$4/6155 \times 10^{-4}$	$4/6690 \times 10^{-4}$	$1/8105 \times 10^{-5}$	$1/9959 \times 10^{-4}$	$2/0041 \times 10^{-4}$
0/4	$1/2068 \times 10^{-4}$	$1/0502 \times 10^{-3}$	$1/0571 \times 10^{-3}$	$2/4703 \times 10^{-5}$	$3/9546 \times 10^{-4}$	$3/9623 \times 10^{-4}$	$7/8872 \times 10^{-6}$	$1/6945 \times 10^{-4}$	$1/6963 \times 10^{-4}$
0/6	$1/4047 \times 10^{-4}$	$7/2941 \times 10^{-4}$	$7/5263 \times 10^{-4}$	$6/5807 \times 10^{-5}$	$2/8002 \times 10^{-4}$	$2/8765 \times 10^{-4}$	$3/3792 \times 10^{-5}$	$1/2519 \times 10^{-4}$	$1/2967 \times 10^{-4}$
0/8	$3/1547 \times 10^{-4}$	$4/3107 \times 10^{-4}$	$5/3417 \times 10^{-4}$	$1/5549 \times 10^{-4}$	$1/6815 \times 10^{-4}$	$2/2902 \times 10^{-4}$	$7/8484 \times 10^{-5}$	$8/0846 \times 10^{-4}$	$1/1268 \times 10^{-4}$
1/0	$4/9985 \times 10^{-4}$	$1/9977 \times 10^{-4}$	$5/3829 \times 10^{-4}$	$2/5251 \times 10^{-4}$	$8/8278 \times 10^{-4}$	$2/6750 \times 10^{-4}$	$1/2739 \times 10^{-4}$	$4/3633 \times 10^{-4}$	$1/3466 \times 10^{-4}$
1/2	$6/8319 \times 10^{-4}$	$9/8718 \times 10^{-4}$	$6/9029 \times 10^{-4}$	$3/4046 \times 10^{-4}$	$4/2905 \times 10^{-4}$	$3/4315 \times 10^{-4}$	$1/6996 \times 10^{-4}$	$2/0412 \times 10^{-4}$	$1/7118 \times 10^{-4}$
1/4	$7/8188 \times 10^{-4}$	$4/2145 \times 10^{-4}$	$7/8272 \times 10^{-4}$	$3/9443 \times 10^{-4}$	$2/5554 \times 10^{-4}$	$3/9526 \times 10^{-4}$	$1/9716 \times 10^{-4}$	$1/1955 \times 10^{-4}$	$1/9752 \times 10^{-4}$
1/6	$8/2470 \times 10^{-4}$	$5/0269 \times 10^{-4}$	$8/2623 \times 10^{-4}$	$4/0913 \times 10^{-4}$	$2/2803 \times 10^{-4}$	$4/0976 \times 10^{-4}$	$2/0470 \times 10^{-4}$	$1/1264 \times 10^{-4}$	$2/0501 \times 10^{-4}$
1/8	$7/7352 \times 10^{-4}$	$3/7593 \times 10^{-4}$	$7/7443 \times 10^{-4}$	$3/8637 \times 10^{-4}$	$1/5812 \times 10^{-4}$	$3/8669 \times 10^{-4}$	$1/9313 \times 10^{-4}$	$7/7395 \times 10^{-4}$	$1/9329 \times 10^{-4}$
2/0	$6/6060 \times 10^{-4}$	$4/9734 \times 10^{-4}$	$6/6347 \times 10^{-4}$	$3/3019 \times 10^{-4}$	$2/8325 \times 10^{-4}$	$3/3140 \times 10^{-4}$	$1/6445 \times 10^{-4}$	$1/3682 \times 10^{-4}$	$1/6492 \times 10^{-4}$

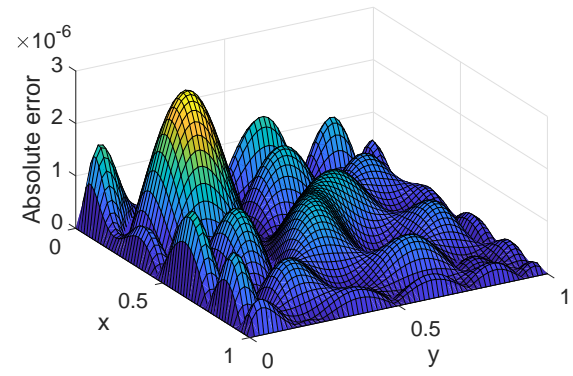
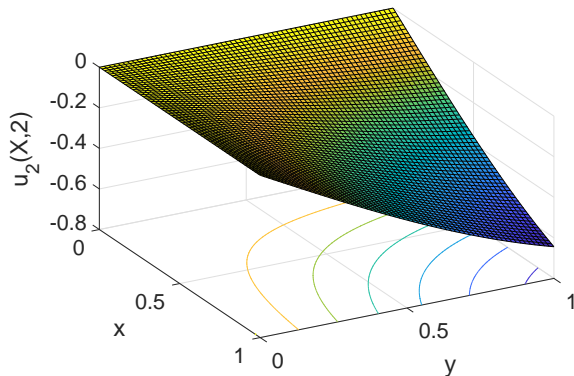
جدول ۷: مقادیر خطاهای به دست آمده روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $v(x, t)$ برای بعضی مقادیر δt در مثال ۲.۵.

۶. نتیجه‌گیری

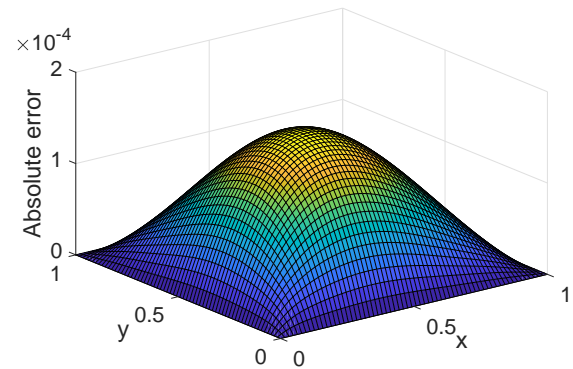
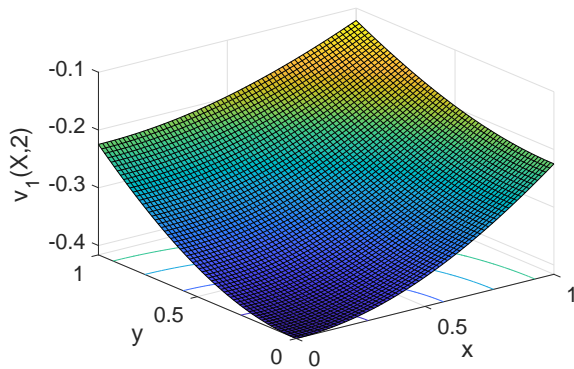
در این مقاله یک دستگاه از معادلات شرودینگر غیرخطی کسری-فراکتال زمانی را معرفی کردیم که مشتق موجود در آن از نوع ریمان-لیوویل-آتانگانا می‌باشد. یک روش نیمه گسسته بر اساس توابع



شکل ۵: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت حقیقی تابع $u(x, t)$ که در آن $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \mu = 0.6, \nu = 0.9$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.



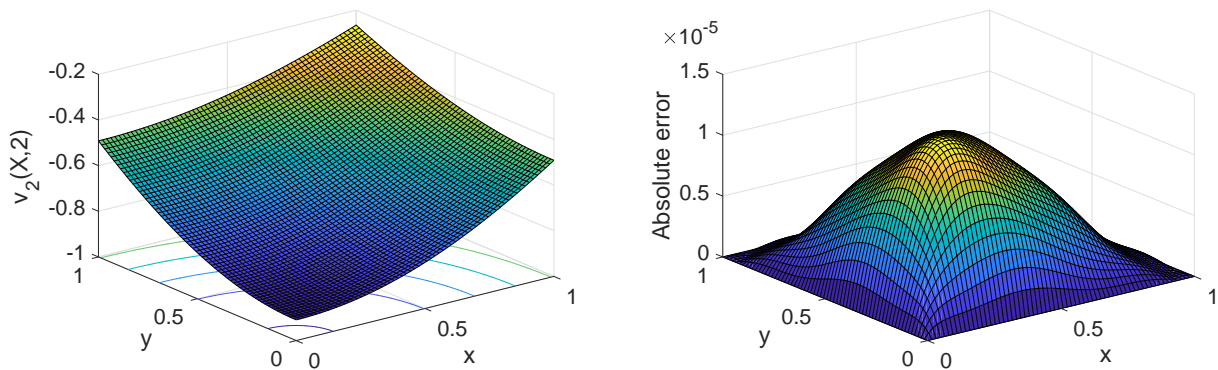
شکل ۶: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت موهومی تابع $u(x, t)$ که در آن $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \mu = 0.6, \nu = 0.9$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.



شکل ۷: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت حقیقی تابع $v(x, t)$ که در آن $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \mu = 0.6, \nu = 0.9$ و $\delta t = 0.0025$ در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.

δt	L_{∞}^{real}	$C - order$	L_{∞}^{image}	$C - order$	L_{∞}^*	$C^* - order$
۱/۱۰	$7/8517 \times 10^{-3}$	-	$7/8486 \times 10^{-4}$	-	$7/8908 \times 10^{-3}$	-
۱/۱۰۰	$6/6060 \times 10^{-4}$	۱/۰۷۵۰	$4/9734 \times 10^{-5}$	۱/۱۹۸۱	$6/6347 \times 10^{-4}$	۱/۰۷۵۳
۱/۲۰۰	$3/3019 \times 10^{-4}$	۱/۰۰۰۵	$2/8325 \times 10^{-5}$	۰/۸۱۲۲	$3/3140 \times 10^{-4}$	۱/۰۰۱۵
۱/۴۰۰	$1/6435 \times 10^{-4}$	۱/۰۰۶۵	$1/3682 \times 10^{-5}$	۱/۰۴۹۸	$1/6492 \times 10^{-4}$	۱/۰۰۶۸

جدول ۸: نرم بی‌نهایت خطا و مرتبه همگرایی روش موجک پیشنهادی برای قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $v(x, t)$ برای مقادیر مختلف δt در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.



شکل ۸: نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و تابع خطای مطلق (سمت راست) برای قسمت موهومی تابع $v(x, t)$ که در آن $(\alpha = 0/5, \beta = 0/5)$ ، $(\mu = 0/6, \nu = 0/9)$ و $\delta t = 0/0025$ در زمان نهایی $T = 2$ در مثال ۲.۵.

پایه‌ای موجک‌های لژاندر دوبعدی را نیز برای حل این دستگاه پیشنهاد دادیم. دقت و صحت روش پیشنهادی را روی چندین مثال عددی امتحان کردیم. نتایج به دست آمده تایید می‌کند که روش ارایه شده دارای دقت و کارایی بالایی در حل دستگاه معرفی شده می‌باشد.

مراجع

- [1] A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.
- [2] K. Y and G. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, New York, Academic Press, 2003.
- [3] J. Gibbon, R. Dodd, J. Eilbeck and H. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, New York, Academic Press, 1982.
- [4] A. Arnold, Numerically absorbing boundary conditions for quantum evolution equations, *VLSI Design*, **6** (1998), 313–319.
- [5] M. Lévy, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*, IEE, 2000.

- [6] J. Xin, J. Hu and H. Lu, The global solution for a class of systems of fractional nonlinear Schrödinger equations with periodic boundary condition, *Comput. Math. Appl.*, **62**(3) (2011), 1510–1521.
- [7] Khaled A. Gepreel and M. Herzallah, Approximate solution to the time–space fractional cubic nonlinear Schrödinger equation, *Appl. Math. Modelling*, **36** (2012), 5678–5685.
- [8] S.H.M. Hamed, E.A. Yousif and A.I. Arbab, Analytic and approximate solutions of the space-time fractional Schrödinger equations by homotopy perturbation sumudu transform method, *Abstr. Appl. Anal.*, <https://doi.org/10.1155/2014/863015>, 2014.
- [9] M.A. Abdelkawy and A.H. Bhrawy, A fully spectral collocation approximation for multi-dimensional fractional schrödinger equations, *J. Comput. Phys.*, **294** (2015), 462–483.
- [10] R. Sahadevan and T. Bakkyaraj, Approximate analytical solution of two coupled time fractional nonlinear schrödinger equations, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, **2**(1) (2015), 113–135.
- [11] E.A-B. Abdel-Salama, E.A. Yousif and M.A. El-Aasser, On the solution of the space-time fractional cubic nonlinear schrödinger equation, *Results in Physics*, **8** (2018), 702–708.
- [12] M. Hosseininia, M.H. Heydari and C. Cattani, A wavelet method for nonlinear variable-order time fractional 2D Schrödinger equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S*, doi: 10.3934/dcdss.2020295, 2019.
- [13] H. Zhang and X. Jiang, Spectral method and bayesian parameter estimation for the space fractional coupled nonlinear schrödinger equations, *Nonlinear Dyn.*, **95**(2) (2019), 1599–1614.
- [14] M. Eslami, Exact traveling wave solutions to the fractional coupled nonlinear schrödinger equations, *Appl. Math. Comput.*, **285** (2016), 141–148.
- [15] D.L. Wang, A.G. Xiao and W. Yang, A linearly implicit conservative difference scheme for the space fractional coupled nonlinear schrödinger equations, *J. Comput. Phys.*, **272** (2014), 644–655.
- [16] M.H. Ran and C.J. Zhang, A conservative difference scheme for solving the strongly coupled nonlinear fractional schrödinger equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **41** (2016), 64–83.
- [17] M. Ran and C. Zhang, Linearized crank-nicolson scheme for the nonlinear timespace fractional schrödinger equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **355** (2019), 218–231.
- [18] E.K. Lenzi, A.S.M. de Castro and R.S. Mendes, Time dependent solutions for fractional

- coupled schrödinger equations, *Appl. Math. Comput.*, **346(C)** (2019), 622–632.
- [19] L. Wei, X. Zhang, S. Kumar and A. Yildirim, A numerical study based on an implicit fully discrete local discontinuous galerkin method for the time-fractional coupled schrödinger system, *Comput. Math. Appl.*, **64(8)** (2012), 2603–2615.
- [20] M. Li, X. Gu, C. Huang, M. Fei and G. Zhang, A fast linearized conservative finite element method for the strongly coupled nonlinear fractional schrödinger equations, *J. Comput. Phys.*, **358** (2018), 256–282.
- [21] D. Wang, A. Xiao and W. Yang, Crank-nicolson difference scheme for the coupled nonlinear schrödinger equations with the riesz space fractional derivative, *J. Comput. Phys.*, **242** (2013), 670–681.
- [22] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl and F. Mohammadi, Two-dimensional Legendre wavelets for solving time-fractional telegraph equation, *Adv. Appl. Math. Mech.*, **6(2)** (2014), 247–260.
- [23] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, F.M. Maalek Ghaini and C. Cattani, Wavelets method for the time fractional diffusion-wave equation, *Phys. Lett., A*, **379** (2015), 71–76.
- [24] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, F.M. Maalek Ghaini and C. Cattani, Wavelets method for solving fractional optimal control problems, *Appl. Math. Comput.*, **286** (2016), 139–154.
- [25] M.H. Heydari, Wavelets Galerkin method for the fractional subdiffusion equation, *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, **11(6)** (2016), 1–7.
- [26] M.H. Heydari and Z. Avazzadeh, Legendre wavelets optimization method for variable-order fractional Poisson equation, *Chaos Solitons Fractals*, **112** (2018), 180–190.
- [27] M.H. Heydari and Z. Avazzadeh, A new wavelet method for variable-order fractional optimal control problems, *Asian J. Control*, **20(5)** (2018), 1–14.
- [28] M. Hosseininia, M.H. Heydari, R. Roohi and Z. Avazzadeh, A computational wavelet method for variable-order fractional model of dual phase lag bioheat equation, *J. Comput. Phys.*, **395** (2019), 1–18.
- [29] M. Hosseininia, M.H. Heydari, F.M. Maalek Ghaini and Z. Avazzadeh, A wavelet method to solve nonlinear variable-order time fractional 2D Klein–Gordon equation, *Comput. Math. Appl.*, **78** (2019), 3719–3730.
- [30] M. Hosseininia and M.H. heydari, Legendre wavelets for the numerical solution of nonlinear variable-order time fractional 2D reaction-diffusion equation involving Mittag-Leffler non-

- singular kernel, *Chaos Solitons Fractals*, **127** (2019), 400–407.
- [31] A. Atangana and S. Qureshi, Modeling attractors of chaotic dynamical systems with fractal-fractional operators, *Chaos Solitons Fractals*, **123** (2019), 320–337.
- [32] A. Atangana, Fractal-fractional differentiation and integration: Connecting fractal calculus and fractional calculus to predict complex system, *Chaos Solitons Fractals*, **102** (2017), 396–406.
- [33] A. Quarteroni, C. Canuto, M. Hussaini and T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1998.
- [34] J.Song, F.Yin and F.Lu, A coupled method of laplace transform and Legendre wavelets for nonlinear Klein-Gordon equations, *Math. Methods Appl. Sci.*, **37** (2014), 781–791.