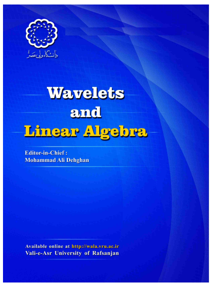
موجک‌ها و جبرخطی ۷(۳) (۱۴۰۰) ۱-۱۷



موجک‌ها و جبرخطی

http://wala.vru.ac.ir

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

مسأله گسترش و خواص جدیدی از K-قاب ها

وحیدرضا مرشدی[آ]، محمد جانفدا*[ب]، رجبعلی کامیابی گل[ب]

[آ]گروه علوم پایه، موسسه آموزش عالی خراسان، مشهد، ایران

[ب]گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردسی مشهد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت شده: ۲۶ اردیبهشت ۱۳۹۸
پذیرفته شده: ۳ آذر ۱۳۹۸
دسترسی آنلاین: ۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۰

ادیتور رابط: فرشید عبداللهی

کلمات کلیدی:
گسترش دنباله بسل،
K-قاب، K-دوگان.

چکیده

در این مقاله قصد داریم مفهوم گسترش هر دنباله بسل دلخواه در فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر $\mathcal{H}$ را به یک K-قاب چسبان برای $\mathcal{H}$ بیان و بررسی کنیم. همچنین گسترش دنباله های بسل به قابهای K - دوگان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به خصوص، مشخصه‌ای را بیان می‌کنیم که بتوان با افزودن خانواده متناهی از بردارها به دنباله‌های بسل آنها را به قابهای K -دوگان تبدیل نمود.

*نویسنده مسئول

آدرس ایمیلها: vahidrezamorshed@khorasan.ac.ir (وحیدرضا مرشدی)، janfada@um.ac.ir (محمد جانفدا)، kamyabi@um.ac.ir (رجبعلی کامیابی گل).

http://doi.org/10.22072/wala.2019.108035.1224

۱. مقدمه

مفهوم قاب ها در فضاهای هیلبرت، توسط دافین و شفر در سال ۱۹۵۲ برای مطالعه برخی از مسایل در سری فوریه غیر همساز مورد استفاده قرارگرفت [۱۰] و از سال ۱۹۸۶ توسط دابشی و همکاران به طورگسترده مورد مطالعه قرار گرفتند [۸]. در حال حاضر، قاب ها نقش مهمی نه تنها در نظریه ها، بلکه همچنین در بسیاری از انواع کاربردها، برای مثال، پردازش سیگنال [۱۴، ۱۸]، نظریه فیلتر بانک [۵] و بسیاری از زمینه های دیگر نقش دارند. در سال ۲۰۱۲، K-قاب ها توسط گاوروتا برای مطالعه سیستم های اتمی به وسیله یک عملگر خطی K در فضاهای هیلبرت معرفی شد[۱۵]. K-قاب ها یک تعمیم از قاب های معمولی هستند. این تعمیم قاب ها اجازه می دهند تا عناصر برد عملگر خطی کراندار را در یک فضای هیلبرت بازسازی کنند. به طورکلی، برد T، زیر فضای بسته نیست (نگاه کنید به [۱۹]).

در سراسر این مقاله $\mathcal{H}$ را فضای هیلبرت فرض می‌کنیم. نماد $B(X,Y)$ را برای فضای همه عملگرهای خطی کراندار بین فضاهای برداری نرمدار X و Y فرض نموده و از $B(X)$ برای نمایش $B(X,X)$ استفاده می کنیم. ضمناً $R(T)$ را برد عملگر $T \in B(X,Y)$ در نظر می‌گیریم و در همه جای این مقاله نماد $\mathbb{J}$ را مجموعه اندیس گذار نامتناهی شمارا می پنداریم. به علاوه $I_{\mathcal{H}}$ را عملگر همانی برای $\mathcal{H}$ و نیز $K^{\dagger}$ را عملگر شبه معکوس K در نظر می گیریم.

یادآوری می کنیم که، دنباله $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ از بردارها در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک K-قاب نامیده می‌شود هرگاه ثابت‌های $A, B > ۰$ موجود باشند که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A\|K^*f\|^۲ \leq \sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle f, f_j\rangle|^۲ \leq B\|f\|^۲. \qquad (۱.۱)$$

به وضوح اگر $K = I_{\mathcal{H}}$، آنگاه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک قاب معمولی است. به علاوه، اگر نامساوی (۱.۱) برای هر $f \in \overline{span}\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ برقرار باشد، آنگاه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک دنباله K-قاب نامیده می شود. اعداد A و B به ترتیب کران پایین و بالای K-قاب نامیده می‌شوند که به وضوح منحصر به فرد نیستند. هرگاه

$$A \parallel K^*f \parallel^۲ = \sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle f, f_j\rangle|^۲$$

$\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را یک K-قاب A-چسبان نامیده و اگر $A = ۱$ باشد، $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-قاب پارسوال یا K-قاب چسبان نام دارد.

همچنین، اگر فقط سمت راست نا مساوی(۱.۱) برقرار باشد، آن‌گاه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \subseteq \mathcal{H}$ را دنباله بسل گوییم. فرض کنیم $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله بسل باشد، در این صورت نگاشت $T : \ell^۲ \longrightarrow \mathcal{H}$ با ضابطه

$$T(\{c_j\}_{j\in\mathbb{J}}) = \sum_{j\in\mathbb{J}} c_j f_j$$

که عملگری خوش تعریف، خطی و کراندار است را عملگر ترکیب و عملگر الحاقی آن یعنی $T^* : \mathcal{H} \to \ell^۲$ با ضابطه

$$T^*(f) = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{J}}$$

را عملگر تجزیه می نامیم. ترکیب این دو عملگر به صورت $S = TT^*$ که عملگری از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}$ است و به صورت

$$Sf = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle f_j$$

بیان می‌شود را عملگر K-قاب می‌گوییم. لازم به ذکر است که در حالت کلی عملگر S برای یک K-قاب لزوماً معکوس‌پذیر نیست، ولی روی زیر فضای بسته $R(K)$ معکوس‌پذیر است و در این حالت برای‌هر $f \in S(R(K))$ داریم

$$B^{-۱}\|f\| \leq \|S^{-۱}f\| \leq A^{-۱}\|K^\dagger\|^۲\|f\| \qquad (۲.۱)$$

که در اینجا $K^\dagger$ عملگر شبه معکوس K است. همچنین دقت شود که اگر K معکوس‌پذیر باشد آنگاه S هم معکوس‌پذیر است و در این‌حالت $\{K^{-۱}f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک قاب خواهد بود.

دو قاب $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را قابهای دوگان برای $\mathcal{H}$ نامیم اگر برای‌هر $f \in \mathcal{H}$،

$$f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle g_j = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j\rangle f_j,$$

همچنین اگر $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-قاب باشد، دنباله بسل $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-دوگان برای $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ [۱] نام دارد اگر

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j\rangle f_j, \quad (f \in \mathcal{H}) \tag{۳.۱}$$

و دستگاه‌های $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ را زوج قاب K-دوگان نامیم.

قضیه زیر یک مشخصه سازی برای K-قاب ها است.

قضیه ۱.۱. *[۲۱] فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \subset \mathcal{H}$. در این صورت گزاره های زیر معادلند.*

(الف) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-قاب برای $\mathcal{H}$ است.

(ب) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله بسل است و دنباله بسل $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ چنان وجوددارد که برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j\rangle f_j.$$

(ج) $\sum_{j\in\mathbb{J}} |\langle f, f_j\rangle|^2 < \infty$ و دنباله بسل $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ چنان وجوددارد که برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$K^* f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle g_j.$$

لازم به ذکر است که $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ در قضیه فوق تعویض پذیر نیستند. به آسانی می توان دید که $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ در قضیه فوق تعویض پذیرند اگروتنهااگر $K = K^*$ باشد.

گزاره ۲.۱. *[۱] فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله های بسل باشند که در تساوی K -دوگان صدق می‌کنند. در این صورت به ترتیب $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$، K -قاب و K^* -قاب هستند.*

توجه شود که اگر $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-قاب برای $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه بنا به قضیه ۱.۱ دنباله $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \subseteq \mathcal{H}$ چنان وجود دارد که

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j\rangle f_j, \quad (x \in \mathcal{H}).$$

و این یعنی $R(K) \subseteq span\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$. علاوه بر این، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۳.۱ ([۲۰]). *دنباله $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-قاب برای $\mathcal{H}$ است اگر و تنها اگر*

$$R(K) \subseteq span\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}.$$

اصول گسترش دنباله‌های بسل به قاب ها در نظریه قاب ها شناخته شده است. در [۶]، کاسازا و لئونارد نشان دادند که هر دنباله بسل در یک فضای متناهی البعد را می‌توان به یک قاب دقیق بسط داد. بعدها این نتیجه به فضای نامتناهی البعد به وسیله لی و سان[۱۸] گسترش یافت. در [۷] کریستینسن و کیم نشان دادند که در هر فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر هر زوج از دنباله های بسل می تواند به یک زوج از قابهای دوگان متقابل گسترش یابد.

در این مقاله قصد داریم مفهوم گسترش هر دنباله بسل دلخواه در فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر $\mathcal{H}$ را به یک K -قاب چسبان برای $\mathcal{H}$ بیان و بررسی کنیم. همچنین گسترش دنباله های بسل به قابهای K -دوگان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به خصوص، مشخصه‌ای را بیان می‌کنیم که بتوان با افزون خانواده متناهی از بردارها به دنباله‌های بسل آنها را به قابهای K -دوگان تبدیل نمود. در انتها، خواص جدیدی از K -قاب ها و K -دوگان ها را معرفی می‌کنیم.

۲. گسترش دنباله‌های بسل به K-قاب ها و قاب های K-دوگان

در این بخش، ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر عملگر خطی K در $B(\mathcal{H})$، هر دنباله بسل را می‌توان به یک K -قاب چسبان در فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر $\mathcal{H}$ تبدیل نمود.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $F = \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با کران B و عملگر K -قاب S_F باشد. در این صورت دنباله $\{p_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ در $\mathcal{H}$ چنان وجود دارد که $\{K^*f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{p_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب چسبان برای $\mathcal{H}$ با کران B است.*

اثبات. توجه داریم که عملگر $K^*(BI_H - S_F)K$ یک عملگر مثبت و خودالحاق است. ریشه دوم آنرا در

نظر می‌گیریم، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} BK^*Kf &= K^*S_FKf + BK^*Kf - K^*S_FKf \\ &= K^*S_FKf + K^*(BI_H - S_F)Kf \\ &= K^*S_FKf + (K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}(K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}f \quad , \quad (f \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

فرض کنیم $\{e_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ نمایش پایه متعامد یکه $\mathcal{H}$ باشد، در این صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} BK^*Kf &= K^*\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle Kf, f_j\rangle f_j + (K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, (K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}e_j\rangle e_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, K^*f_j\rangle K^*f_j + \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, (K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}e_j\rangle (K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}e_j. \end{aligned}$$

حال با گرفتن ضرب داخلی روی هر دو طرف با f ، می‌توان دید که

$$\{K^*f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{(K^*(BI_H - S_F)K)^{\frac{1}{2}}e_j\}_{j\in\mathbb{J}}$$

یک K -قاب چسبان برای $\mathcal{H}$ با کران B است.

□

یادآوری می‌کنیم که عملگر T از رتبه r $(r < \infty)$ نامیده می‌شود اگر $\dim R(T) = r$.

گزاره ۲.۲. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک دنباله بسل در $\mathcal{H}$ باشد به طوری که دنباله متناهی $\{x_j\}_{j=1}^k$ در $\mathcal{H}$ چنان وجود دارد که دنباله گسترش یافته $\{x_j\}_{j=1}^k \cup \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب برای $\mathcal{H}$ است. در این صورت دنباله بسل $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ در $\mathcal{H}$ چنان وجود دارد که عملگر $K - T_F^*T_G$ از رتبه متناهی است، که T_F و T_G به ترتیب نمایش عملگرهای تجزیه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ است.*

اثبات. فرض کنید $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{y_j\}_{j=1}^k$ قاب K -دوگانی از $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{x_j\}_{j=1}^k$ باشد و فرض کنیم V_1 عملگر تجزیه آن باشد. ملاحظه می‌شود که $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله بسل و عملگر تجزیه آن را با T_G نمایش می‌دهیم. همچنین، به فرض U_1 عملگر تجزیه K -قاب $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{x_j\}_{j=1}^k$ باشد. سرانجام، فرض کنیم

$\tilde{U}$ عملگر تجزیه دنباله بسل $\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{k\text{-تا}}, g_1, g_2, \cdots$ باشد. در این صورت عملگر $Q = U_1 - \tilde{U}$ دارای رتبه متناهی بوده و بنابراین Q^* نیز رتبه‌اش متناهی است. چون $\{y_j\}_{j=1}^{k} \cup \{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K-دوگان $\{x_j\}_{j=1}^{k} \cup \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ است، داریم $U_1^* V_1 = K$.
از طرف دیگر،

$$(\tilde{U})^* U_1 f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j \rangle f_j = T_G^* T_F f, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین

$$(\tilde{U})^* U_1 = U_1^* V_1 = T_G^* T_F.$$

پس با توجه به این داریم

$$K^* - T_G^* T_F = K^* - (\tilde{U})^* U_1 = K^* - (V_1 - Q)^* U_1 = K^* - V_1^* U_1 + Q^* U_1 = Q^* U_1$$

بنابراین، $K^* - T_G^* T_F = Q^* U_1$ عملگری با رتبه متناهی است و از این رو $(K^* - T_G^* T_F)^* = K - T_F^* T_G$ از رتبه متناهی است.

□

در ادامه این بخش، فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ زوجی از دنباله‌های بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. هدفمان یافتن زوجی از گردایه بردارهای $\{p_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{q_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ است که $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{p_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{q_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ تشکیل یک زوج قابهای K - دوگان دهند. یعنی این که

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j \rangle f_j + \sum_{i\in\mathbb{I}} \langle f, q_i \rangle p_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

قضیه ۳.۲. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله هایی بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت یک مجموعه اندیسگذار $\mathbb{I}$ و دنباله های بسل $\{p_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{q_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ در $\mathcal{H}$ چنان موجودند که $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{p_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{q_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ تشکیل زوجی از قابهای K -دوگان برای $\mathcal{H}$ می‌دهند.*

اثبات. فرض کنید T_F و T_G به ترتیب نمایش عملگرهای تجزیه $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ باشند. در این صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$ ، $T_F^*T_Gf = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, g_j\rangle f_j$. عملگر کراندار $\Phi := K - T_F^*T_G$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\{a_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{b_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ نمایش زوج قابهای دوگان برای $\mathcal{H}$ باشند. بنابراین

$$\Phi f = \sum_{i\in\mathbb{I}}\langle \Phi f, a_i\rangle b_i = \sum_{i\in\mathbb{I}}\langle f, \Phi^* a_i\rangle b_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

از این رو برای هر $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} Kf &= T_F^*T_Gf + (K - T_F^*T_G)f \\ &= T_F^*T_Gf + \Phi f \\ &= \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, g_j\rangle f_j + \sum_{i\in\mathbb{I}}\langle f, \Phi^* a_i\rangle b_i. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که $\{\Phi^* a_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ یک دنباله بسل است. بنابراین می‌توان دید که دنباله های $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{\Phi^* a_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ و $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{b_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ قابهای K -دوگان برای $\mathcal{H}$ می‌باشند.

□

در قضیه زیر مشخصه سازی از دنباله های بسل ارائه می‌کنیم که می توان با افزودن خانواده متناهی از بردارها به آنها، به قابهای K-دوگان در فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر نامتناهی البعد رسید.

قضیه ۴.۲. *فرض کنید $K \in B(\mathcal{H})$ عملگری خودتوان باشد. فرض کنید $F = \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $G = \{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک زوج از دنباله های بسل در $\mathcal{H}$ به ترتیب با عملگرهای تجزیه T_F و T_G باشند. در این صورت، KF و G می‌توانند به یک زوج از قابهای K -دوگان به وسیله افزودن یک زوج گردایه متناهی از بردارها گسترش یابند اگر و تنها اگر $K(I - T_F^*T_G)$ دارای رتبه متناهی باشد.*

اثبات. فرض کنید دنباله های $\{p_j\}_{j=1}^{k}$ و $\{q_j\}_{j=1}^{k}$ چنان وجود داشته باشند که $\{Kf_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{p_j\}_{j=1}^{k}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{q_j\}_{j=1}^{k}$ تشکیل یک زوج از قابهای K -دوگان در $\mathcal{H}$ دهند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} Kf &= \sum \langle f, g_j\rangle Kf_j + \sum_{j=1}^{k} \langle f, q_j\rangle p_j \\ &= KT_F^*T_G f + \sum_{j=1}^{k} \langle f, q_j\rangle p_j, \qquad (f \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

از این رو برای هر $f \in \mathcal{H}$ ، $(K - KT_F^*T_G)(f) = \sum_{j=1}^{k} \langle f, q_j\rangle p_j$. بنابراین عملگر

$$K(I - T_F^*T_G) = K - KT_F^*T_G$$

دارای رتبه متناهی است.

برعکس، فرض کنید $\dim(R(K(I - T_F^*T_G))) = d$. در این صورت می‌توان K -قاب $\{p_j\}_{j=1}^{k}$ برای $R(K(I - T_F^*T_G))$، که $k \geq d$ را پیدا نمود. فرض کنیم $\{q_j\}_{j=1}^{k}$ یک قاب K -دوگان از $\{p_j\}_{j=1}^{k}$ در $R(K(I - T_F^*T_G))$ باشد. برای $f \in \mathcal{H}$ ،

$$\begin{aligned} (K^2 - KT_F^*T_G)f &= K(I - T_F^*T_G)f \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle K(I - T_F^*T_G)f, q_j\rangle p_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle f, (K(I - T_F^*T_G))^* q_j)\rangle p_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle f, (K^*(I - T_G^*T_F)q_j)\rangle p_j. \end{aligned}$$

حال، برای $1 \leq j \leq k$ ، دنباله $x_j = K^*(I - T_G^*T_F)q_j$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت دنباله های $\{Kf_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{x_j\}_{j=1}^{k}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{q_j\}_{j=1}^{k}$ زوجی از دنباله های بسل در $\mathcal{H}$ می‌باشند. برای هر $f \in \mathcal{H}$

داریم

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, g_j\rangle Kf_j + \sum_{j=1}^{k}\langle f, x_j\rangle p_j.$$

از این رو دستگاه $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{x_j\}_{j=1}^{k}$ و $\{Kf_j\}_{j\in\mathbb{J}} \cup \{p_j\}_{j=1}^{k}$ تشکیل یک زوج از قابهای K -دوگان در $\mathcal{H}$ می‌دهند. □

در آخرین قسمت از این بخش، شرطی لازم برای گسترش متناهی یک زوج از دنباله های بسل به یک زوج از قابهای K -دوگان ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید $F = \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $G = \{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک زوج از دنباله های بسل در $\mathcal{H}$ به ترتیب با عملگرهای تجزیه T_F و T_G باشند. فرض کنید F و G بتوانند به وسیله افزودن یک زوج گردایه متناهی از بردارها به یک زوج از قابهای K -دوگان گسترش یابند. در این صورت $K\mid_{Ker\ T_G}$ عملگری از رتبه متناهی است.*

اثبات. فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}\cup\{x_j\}_{j=1}^{k}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}\cup\{q_j\}_{j=1}^{k}$ تشکیل یک زوج از قابهای K -دوگان در $\mathcal{H}$ دهند. همچنین فرض کنید، $f \in Ker\ T_G$ باشد. در این صورت داریم $T_G(f) = \{\langle f, g_j\rangle\}_{j\in\mathbb{J}} = 0$. یعنی برای هر $j \in \mathbb{J}$، $\langle f, g_j\rangle = 0$ حال داریم

$$Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, g_j\rangle f_j + \sum_{j=1}^{k}\langle f, q_j\rangle p_j = \sum_{j=1}^{k}\langle f, q_j\rangle p_j.$$

بنابراین $R(K\mid_{Ker\ T_G}) \subseteq Span\ \{p_1, \cdots, p_k\}$. از این رو $K\mid_{Ker\ T_G}$ عملگری دارای رتبه متناهی است.

□

۳. خواص جدیدی از K-قابها

در این بخش، ابتدا شرط K -قاب بودن را برای زیرمجموعه های چگال فضای هیلبرت بیان نموده و سپس چند خاصیت از K -قابها و قابهای K-دوگان را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۳. *برای دنباله $F = \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ در $\mathcal{H}$، شرط نامساوی K -قاب برای هر $f \in \mathcal{H}$ برقرار است اگر و تنها اگر برای یک زیر مجموعه چگال $\mathcal{H}$ برقرار باشد.*

اثبات. فرض کنید V زیر مجموعه چگال $\mathcal{H}$ باشد که در نامساوی K -قاب برای هر $f \in V$ صدق می‌کند. فرض کنید $f \in \mathcal{H}$ داده شده باشد. دنباله ای مانند $\{\varphi_k\} \subseteq V$ ، همگرا به f را در نظر بگیرید. سمت راست نامساوی K -قاب برقرار است [۴]. نشان می‌دهیم کران پایین K -قاب روی V برقرار است. بنا به نامساوی مثلث، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$(\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f, f_j\rangle |^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \geq (\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle \varphi_k, f_j\rangle |^{۲})^{\frac{۱}{۲}} - (\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f-\varphi_k, f_j\rangle |^{۲})^{\frac{۱}{۲}}.$$

چون کران پایین K -قاب، بنا به فرض، برای φ_k برقرار بوده و کران بالای K -قاب برای هر f صادق است، داریم

$$(\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f, f_j\rangle |^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \geq A^{\frac{۱}{۲}} \| K^*\varphi_k \|_{\mathcal{H}} - B^{\frac{۱}{۲}} \| f-\varphi_k \|_{\mathcal{H}} \ .$$

با فرض $k \to \infty$ ، روی سمت راست نامساوی، شرط کران پایین K -قاب روی V برقرار است، یعنی

$$(\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f, f_j\rangle |^{۲})^{\frac{۱}{۲}} \geq A^{\frac{۱}{۲}} \| K^* f \|_{\mathcal{H}} \ .$$

□

گزاره ۲.۳. *فرض‌کنید $F = \{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب با کران A و B برای $\mathcal{H}$ باشد. فرض‌کنید $U \neq ۰$ عملگری‌کراندار روی $\mathcal{H}$ با برد بسته باشد. در این صورت $\{UU^\dagger f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک دنباله K -قاب با کرانهای K -قاب A و $B \| UU^\dagger \|^{۲}$ است.*

اثبات. اگر $f \in \mathcal{H}$، در این صورت داریم

$$\sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f, UU^\dagger f_j\rangle |^{۲} \leq B \| UU^\dagger \|^{۲} \| f \|^{۲} \ .$$

برای شرط پایین K -قاب، فرض کنید $g \in span\{UU^\dagger f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$، برای یک $f \in span\{f_j\}$، می‌توان

نوشت

$$g = UU^{\dagger} f.$$

چون عملگر $UU^{\dagger}$ ، تصویر متعامد بروی $R(U)$ می‌باشد، بنابراین خودالحاق است. از این رو

$$g = UU^{\dagger} f = (UU^{\dagger})^{*} UU^{\dagger} f$$

و بنابراین

$$K^{*} g = K^{*} UU^{\dagger} f = K^{*} (UU^{\dagger})^{*} UU^{\dagger} f.$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} A \parallel K^{*} g \parallel^{۲} &= A \parallel K^{*} (UU^{\dagger})^{*} UU^{\dagger} f \parallel^{۲} \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{J}} | \langle (UU^{\dagger})^{*} UU^{\dagger} f, f_j \rangle |^{۲} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{J}} | \langle UU^{\dagger} f, UU^{\dagger} f_j \rangle |^{۲} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{J}} | \langle g, UU^{\dagger} f_j \rangle |^{۲} . \end{aligned}$$

پس شرط پایین K -قاب برای هر $g \in span\{UU^{\dagger} f_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ برقرار است و بنابراین شرط مذکور، روی $g \in \overline{span}\{UU^{\dagger} f_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ برقرار می‌باشد. یعنی $\{UU^{\dagger} f_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ یک دنباله K -قاب است.

□

فرض کنید $F = \{f_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ یک K -قاب باشد. K^{*} -قاب

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_j\}_{j \in \mathbb{J}} := \{K^{*} S_F^{-۱} P_{S_F(R(K))} f_j\}_{j \in \mathbb{J}},$$

قاب K -دوگان کانونی F نام دارد. لازم به ذکر است که $\{\mathcal{F}_j\}_{j \in \mathbb{J}}$ یک K^{*} -قاب است [۱] .

می‌توان بررسی نمود که K -دوگان هر K -قاب یک K^* -قاب است [۱]. همچنین، دنباله $\mathfrak{F} = \{K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K^* -قاب چسبان است و

$$K^*Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}f_j\rangle K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}f_j.$$

زیرا

$$\begin{aligned}
S_{\mathfrak{F}}f &= \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, \mathfrak{F}_j\rangle\mathfrak{F}_j \\
&= K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, K^*S^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}f_j\rangle f_j \\
&= K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}\sum_{j\in\mathbb{J}}\langle (S_F^{-\frac{1}{2}})^*Kf, f_j\rangle f_j \\
&= K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}S_F(S_F^{-\frac{1}{2}})^*Kf \\
&= K^*S_F^{-\frac{1}{2}}P_{S_F^{\frac{1}{2}}(R(K))}S_F^{\frac{1}{2}}S_F^{\frac{1}{2}}(S_F^{-\frac{1}{2}})^*Kf \\
&= K^*S_F^{\frac{1}{2}}(S_F^{-\frac{1}{2}})^*Kf \\
&= K^*Kf.
\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\langle S_{\mathfrak{F}}f, f\rangle = \langle K^*Kf, f\rangle = \| Kf \|^2 .$$

درگزاره زیرنشان می دهیم که اگر یک عملگر یکانی را برای زوجی از قابهای K- دوگان به کار ببریم دوباره یک زوج ازقابهای K- دوگان به دست می آید.

گزاره ۳.۳. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ قابهای K -دوگان برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ بوده و $U :$*

$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ عملگری یگانی باشد به طوری که $UK = KU$. در این صورت $\{Uf_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{Ug_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ نیز تشکیل زوجی از قابهای K -دوگان برای $\mathcal{H}$ می‌دهند.

اثبات. فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ و $\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ قابهای K -دوگان باشند. بنابراین برای هر $f \in \mathcal{H}$، می توان نوشت $Kf = \sum_{j\in\mathbb{J}}\langle f, g_j\rangle f_j$ ، یا معادلاً $K = T_F^*T_G$. از این رو داریم

$$UT_F^*T_GU^* = UKU^* = KUU^* = K$$

که اثبات کامل می‌شود.

□

در گزاره زیر، رابطه بین K -قابهای چسبان و قابهای K -دوگان بیان شده است.

گزاره ۴.۳. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب برای $R(K)$ باشد. در این صورت $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ ، K -قاب چسبان برای $R(K)$ است اگر وتنها اگر KK^* از $R(K)$ بروی $S_F(R(K))$ ، معکوس‌پذیر بوده و $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دارای یک K -دوگان برای یک $C > 0$ به صورت $g_j = CK^*(KK^*)^{-1}P_{S_F(R(K))}f_j$ باشد.*

اثبات. فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب چسبان برای $R(K)$ باشد و

$$\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} = \{K^*S_F^{-1}P_{S_F(R(K))}f_j\}_{j\in\mathbb{J}},$$

K -دوگان کانونی $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ باشد. در این صورت اثبات کامل می‌شود. چون در این حالت داریم $AKK^* = S_F$ و بنابراین KK^* از $R(K)$ بروی $S_F(R(K))$ معکوس‌پذیر بوده و

$$\frac{1}{A}K^*(KK^*)^{-1}P_{S_F(R(K))} = K^*S_F^{-1}P_{S_F(R(K))}.$$

برعکس، فرض کنید KK^* از $R(K)$ بروی $S_F(R(K))$ معکوس‌پذیر بوده و

$$\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} = \{CK^*(KK^*)^{-1}P_{S_F(R(K))}f_j\}_{j\in\mathbb{J}},$$

K -دوگان $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ باشد. می‌دانیم برای هر $f \in R(K)$،

$$Kf = T_F^* T_G f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, g_j\rangle f_j,$$

و بنابراین

$$K^* f = T_G^* T_F f = \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle g_j.$$

حال برای هر $f \in R(K)$ می توان نوشت

$$\begin{aligned}
\| K^* f \|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle \langle g_j, K^* f\rangle \\
&= \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle \langle CK^*(KK^*)^{-1} P_{S_F(R(K))} f_j, K^* f\rangle \\
&= C \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle \langle (KK^*)^{-1} P_{S_F(R(K))} f_j, KK^* f\rangle \\
&= C \sum_{j\in\mathbb{J}} \langle f, f_j\rangle \langle f_j, f\rangle \\
&= C \sum_{j\in\mathbb{J}} | \langle f, f_j\rangle |^2 .
\end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ ، K -قاب چسبان با کران K - قاب $\frac{1}{C}$ است.

□

در گزاره و قضیه زیر، خواصی از K -قابها و قابهای K -دوگان بیان شده‌اند که اثبات آنها شبیه اثبات لم ۶.۳.۶ و قضیه ۶.۳.۷ در [۸] هستند.

گزاره ۵.۳. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K - قاب با عملگر تجزیه T_F بوده و $W : \ell^2 \to \mathcal{H}$ عملگری*

کراندار باشد. عملگر معکوس چپ کراندار T_F دقیقاً عملگرهای به شکل

$$S_F^{-1} P_{S_F(R(K))} T_F^* + W(I_{\mathcal{H}} T_F S_F^{-1} P_{S_F(R(K))} T_F^*)$$

می‌باشند.

قضیه ۶.۳. *فرض کنید $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ یک K -قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. قابهای K -دوگان $\{f_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دقیقاً خانواده*

$$\{g_j\}_{j\in\mathbb{J}} = \{S_F^{-1} P_{S_F(R(K))} f_j + h_j - \sum_{k\in\mathbb{J}} \langle S_F^{-1} P_{S_F(R(K))} f_j, f_k \rangle h_k\}_{j\in\mathbb{J}}$$

می‌باشد که $\{h_j\}_{j\in\mathbb{J}}$ دنباله بسل در $\mathcal{H}$ است.

مراجع

[1] F. Arabyani and A.A. Arefijamaal, Some constructions of K-frames and their duals, *Rocky Mt. J. Math.*, **47**(6) (2017), 1749–1764.

[2] D. Bakić and T. Berić, Finite extensions of Bessel sequences, *Banach J. Math. Anal.*, **9**(4) (2015), 1–13.

[3] B.A. Barnes, Majorization, Range inclusion, and factorization for bounded linear operators,*Proc. Am. Math. Soc.*,**133**(1) (2004), 155–162.

[4] J.J. Benedetto and M.W. Frazier, *Wavelets, Mathematics and Applications*, CRC Press, Inc., Florida, 1994.

[5] H. Bolcskei, F. Hlawatsch and H.G. Feichtinger, Frame-theoretic analyssis of over-sampled filter banks, *IEEE Trans. Signal Process.*, **46**(1) (1998), 3256–3268.

[6] P.G. Casazza and N. Leonhard, Classes of finite equal norm Parseval frames, *Contemp. Math.*, **451**(1) (2008), 11–31.

[7] O. Christensen, H.O. Kim and R.Y. Kim, Extensions of Bessel sequences to dual pairs of frames, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **34**(1) (2013), 224–233.

[8] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2016.

[9] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless non-orthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, **27**(1) (1986), 1271–1283.

[10] I. Deepshikhal and L.K. Vashisht, Extension of Bessel sequences to dual frames in Hilbert spaces, *Sci. Bull., Ser. A, Appl. Math. Phys.*, **79**(2) (2017), 71–82.

[11] R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.

[12] Y.C. Eldar, Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors, *J. Fourier. Anal. Appl.*, **9**(1) (2003), 77–96.

[13] Y.C. Eldar and T. Werther, General framework for consistent sampling in Hilbert spaces, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **3**(3) (2005), 347–359.

[14] H.G. Feichtinger and K. Gröchenig, *A Unified Approach to Atomic Decompositions via Integrable Group Representations*, In: Proc. Conf. Function Spaces and Applications, Lecture Notes in Math., 1302, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.

[15] P.J.S.G. Ferreira, *Mathematics for Multimedia Signal Processing II: Discrete Finite Frames and Signal Reconstruction*, In: Byrnes, J.S. (ed.) Signal processing for multimedia, IOS Press, Amsterdam, 1999.

[16] L. Găvruţa, Frames for operators, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **32**(1) (2012), 139–144.

[17] K. Gröchenig, Describing functions: Atomic decompositions versus frames, *Monatsh. Math.*, **112**(1) (1991), 1–42.

[18] D.F. Li and W.C. Sun, Expansion of frames to tight frames, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, **25** (2009), 287–292.

[19] M. Pawlak and U. Stadtmuller, Recovering band-limited signals under noise, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **42** (1994), 1425–1438.

[20] Zh.Q. Xiang and Y.M. Li, Frame sequences and dual frames for operators, *Sci. Asia*, **42** (2016), 222–230.

[21] X. Xiao, Y. Zhu and L. Găvruţa, Some properties of K-frames in Hilbert spaces, *Result. Math.*, **63**(3-4) (2013), 1243–1255.

[22] R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press., New York, 1980.